Capítulo 1

Vibraciones y ondas

NOMENCLATURA

a = velocidad de propagación de las ondas, m/seg; aceleración, m/seg^2
A = área, m^2
A_0 = amplitud de onda, m
A,B = constantes
c = coeficiente de amortiguamiento, nt-seg/m
C,D = constantes
d = diámetro, m
f = frecuencia, ciclos/seg
f_b = frecuencia de pulsación, ciclos/seg
h = longitud, m
I_0 = función hiperbólica de Bessel, de la primera clase y orden cero
J_0 = función de Bessel, de la primera clase y orden cero
k = constante de un resorte, nt/m
K_0 = función hiperbólica de Bessel, de la segunda clase y orden cero
m = masa, kg
p_n = frecuencias naturales, ciclos/seg
P = período, seg
P_b = período de pulsación, seg
r = razón de frecuencias; distancia radial, m
S = tensión, nt
MAS = movimiento armónico simple
t' = espesor, m
W = trabajo realizado, julios/ciclo
Y = módulo de elasticidad de Young, nt/m^2
ω = frecuencia angular, rad/seg
ω_d = frecuencia angular amortiguada, rad/seg
ω_n = frecuencia angular natural, rad/seg,
λ = longitud de onda, m
ζ = factor de amortiguamiento
θ, ϕ = ángulos, rad
ρ = densidad, kg/m^3
ρ_a = masa/área, kg/m^2
ρ_L = masa/longitud, kg/m
μ = relación de Poisson
σ = tensión superficial, nt/m^2
ϵ = deformación o fatiga

INTRODUCCION

La acústica es la física del sonido. Aunque la teoría fundamental de la acústica trata de las vibraciones y de la propagación de las ondas, podemos considerar el tema como una ciencia multidisciplinaria.

Los físicos, por ejemplo, investigan las propiedades de la materia mediante conceptos sobre la propagación de las ondas en medios materiales. El ingeniero acústico se interesa en la reproducción fiel del sonido, en la conversión de la energía mecánica y eléctrica en energía acústica, y en el diseño de trasductores acústicos. El arquitecto está más interesado en la absorción y en el aislamiento del sonido en los edificios, en la reverberación controlada y en la prevención del eco en los auditorios y salas de música. El músico desea saber cómo obtener combinaciones rítmicas de tonos por medio de la vibración de las cuerdas, columnas de aire y membranas.

Por otro lado, los fisiólogos y los sicólogos estudian intensamente las características y acciones del mecanismo del oído humano y de las cuerdas vocales, los fenómenos del oído, las reacciones del hombre con respecto a los sonidos y a la música, y los criterios sicoacústicos para obtener comodidad con cierto nivel de ruido y condiciones de audición agradables. Los lingüistas se interesan en la percepción de sonidos complejos y en la producción del lenguaje hablado por medios sintéticos.

El ultrasonido, un tema de acústica que habla de las ondas sonoras de frecuencia por encima de los 15.000 ciclos por segundo, ha encontrado creciente aplicación en la oceanografía, en la medicina y en la industria.

Además, debido a la conciencia general y unánime preocupación del creciente nivel del ruido producido por aviones, automóviles, industria pesada y artefactos domésticos, y sus efectos perjudiciales, tales como el daño al oído e irritación física y síquica, crece la demanda para un mejor entendimiento del sonido, sus causas, efectos y su control.

ONDAS

Las *ondas* se causan por una perturbación, o influencia, que empieza en un punto y se trasmite y se propaga a otro punto de manera predecible, de acuerdo con las propiedades físicas del medio elástico a través del cual se trasmite la perturbación.

A medida que un cuerpo vibrante avanza desde su posición de equilibrio estático, impulsa el aire delante de él y lo comprime. Al mismo tiempo, se presenta un enrarecimiento en la parte inmediatamente posterior del cuerpo, y el aire se precipita a llenar este espacio vacío. De esta manera, la compresión del aire se trasfiere a partes distantes y el aire se pone en movimiento en forma de *ondas sonoras*. El resultado es *el sonido*. Para el oído humano, el sonido es la sensación auditiva producida por la perturbación del aire. Puesto que tanto los fluidos como los sólidos poseen inercia y elasticidad, los dos trasmiten las ondas sonoras.

Las ondas sonoras son *ondas longitudinales*, es decir, las partículas se mueven en la dirección del movimiento de la onda. La propagación de las ondas sonoras implica la trasferencia de energía a través del espacio. La energía que portan las ondas sonoras es parcialmente cinética y parcialmente potencial; la primera se debe al movimiento de las partículas del medio, la segunda al desplazamiento elástico de las mismas partículas. Al tiempo que las ondas sonoras se extienden en todas direcciones, a partir de la fuente, pueden también ser reflejadas y refractadas, disipadas y difractadas, interferidas y absorbidas. Se necesita un medio para la propagación de las ondas sonoras, y la velocidad de éstas depende de la densidad y la temperatura del medio. (Véanse los problemas 1.1-1.7.)

MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE

Si una partícula se encuentra en movimiento rectilíneo, y si su aceleración a siempre es proporcional a su distancia x de un punto fijo sobre la trayectoria, y está dirigida hacia el punto fijo, se dice que la partícula ejecuta un *movimiento armónico simple* (MAS), que es la forma más simple de un *movimiento periódico.* En forma de ecuación diferencial, el movimiento armónico simple se representa por

$$a = -\omega^2 x \quad \text{o} \quad d^2x/dt^2 + \omega^2 x = 0$$

con solución

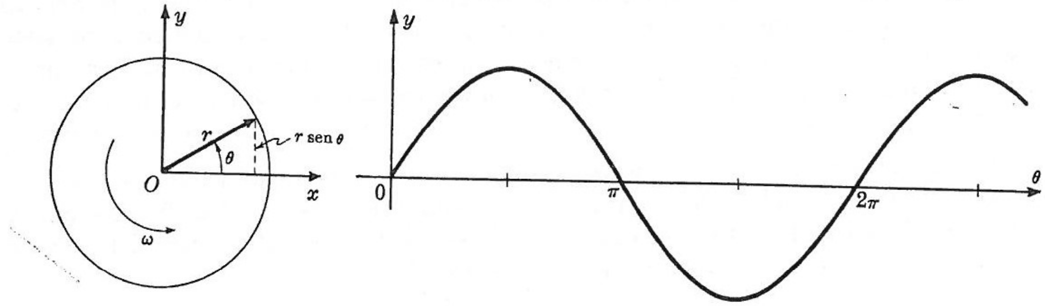
$$x(t) = A \operatorname{sen} \omega t + B \cos \omega t$$

o

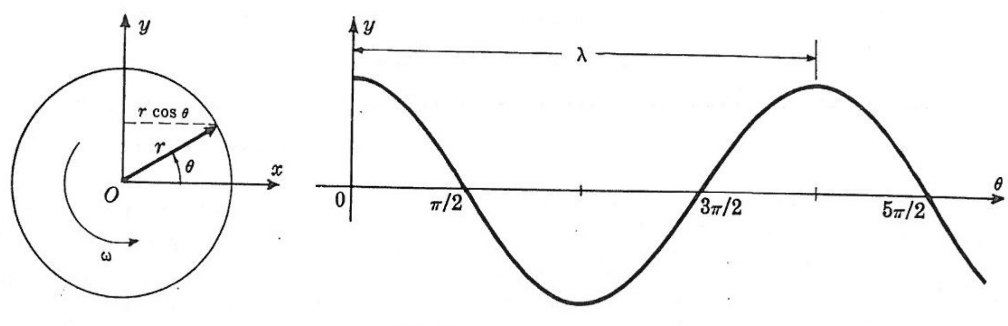
$$x(t) = \sqrt{A^2+B^2}\operatorname{sen}(\omega t + \theta), \qquad x(t) = \sqrt{A^2+B^2}\cos(\omega t - \phi)$$

donde A y B son constantes arbitrarias, ω es la frecuencia angular en rad/seg, y θ, ϕ son los ángulos de fase en radianes.

El movimiento armónico simple puede ser una *función seno* o una *función coseno* del tiempo, y puede representarse convenientemente por vectores rotatorios, como se muestra en la figura 1-1. El vector r de magnitud constante rota, en el sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj, con la velocidad angular constante ω; sus proyecciones sobre los ejes x y y son, respectivamente, las funciones seno y coseno del tiempo. (Véase el problema 1.8.)



(*a*) Función seno



(*b*) Función coseno

Fig. 1-1

Una *onda armónica* tiene su perfil (configuración de desplazamiento) en forma sinusoidal, es decir, es una curva seno o coseno. Una onda armónica que se mueve en la dirección positiva de x con velocidad c está dada por

$$u(x,t) = \begin{cases} A_0 \operatorname{sen} m(x-ct) \\ A_0 \cos m(x-ct) \end{cases}$$

mientras que una onda armónica que se mueve en la dirección negativa de x con velocidad c esta dada por

$$u(x,t) = \begin{cases} A_0 \operatorname{sen} m(x+ct) \\ A_0 \cos m(x+ct) \end{cases}$$

donde A_0 es la *amplitud* de onda. Se les llama ondas *armónicas progresivas.*

Una onda esférica que diverge del origen de coordenadas con velocidad c se representa por

$$u(r,t) = (A_0/r)\,f(ct-r)$$

Análogamente, una *onda progresiva armónica esférica* se expresa por

$$u(r,t) = (A_0/r)e^{i(\omega t - kr)}$$

donde $i = \sqrt{-1}$ y $k = 1/\lambda$ es el número de la onda, es decir, el número de los ciclos de la onda por unidad de longitud. El perfil de la onda se repite al cabo de una distancia $\lambda = 2\pi/m$ que se llama la *longitud de onda.*

VIBRACIONES

Los sistemas que poseen masa y elasticidad están en capacidad de ejecutar un movimiento relativo. Si el movimiento de estos sistemas se repite después de un intervalo de tiempo dado, este tipo de movimiento periódico se denomina *vibración*. Para analizar la vibración, se simplifica idealmente el sistema, en función de una *masa m, un resorte k* y *un amortiguador c*, que representan respectivamente el cuerpo, la elasticidad y el rozamiento del sistema. En estas condiciones, la *ecuación del movimiento* expresa el desplazamiento del sistema como función del tiempo. El *período P* es el tiempo, en segundos, que necesita el movimiento periódico para repetirse, y la frecuencia f es el número de ciclos en la unidad de tiempo.

La *vibración libre*, u *oscilación momentánea*, es el movimiento periódico que se observa cuando el sistema se desplaza de su posición de equilibrio estático. Las fuerzas actuantes son la fuerza elástica, la fuerza de rozamiento y el peso de la masa. Por efecto del rozamiento, la vibración disminuirá con el tiempo según la expresión

$$x_c(t) = e^{-\zeta\omega_n t}(A \operatorname{sen}\omega_d t + B\cos\omega_d t)$$

donde ζ = factor de amortiguamiento,
ω_n = frecuencia angular natural en rad/seg,
ω_d = frecuencia angular natural amortiguada en rad/seg,
A, B = constantes arbitrarias. (Véanse los problemas 1.9-1.10.)

Durante el movimiento de vibración, cuando sobre el sistema actúan fuerzas externas, de la forma $F(t) = F_0 \operatorname{sen}\omega t$ o $F_0\cos\omega t$, el movimiento resultante es una *vibración forzada.* En este estado de vibración forzada, el sistema tratará de vibrar con su frecuencia natural, y también seguirá la frecuencia de la fuerza de excitación. Si existe amortiguamiento, la componente del movimiento que no experimenta la fuerza de excitación sinusoidal se extinguirá gradualmente. En consecuencia, el sistema vibrará con la frecuencia de la fuerza de excitación independientemente de las condiciones iniciales de la frecuencia natural del sistema. El movimiento resultante se llama *estado de vibración estable*, o *respuesta* del sistema, y se representa por

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}}\cos(\omega t-\theta)$$

donde F_0 = magnitud de la fuerza de excitación,
k = constante elástica,
m = masa del sistema,
c = coeficiente de amortiguamiento,
ω = frecuencia de la fuerza de excitación, en rad/seg,
θ = $\tan^{-1}\dfrac{c\omega}{k-m\omega^2}$ = ángulo de fase (Véase el problema 1.11.)

Se presenta *resonancia* cuando la frecuencia de la fuerza de excitación es igual a la frecuencia natural del sistema. Cuando esto ocurre, la amplitud de la vibración aumentará indefinidamente de acuerdo, únicamente, con la magnitud del amortiguamiento presente en el sistema.

ENERGIA DE VIBRACION

Durante la vibración libre con amortiguamiento, la energía es absorbida continuamente por el amortiguador y se disipa en forma de calor. El sistema, por tanto, pierde energía continuamente y, como resultado, la amplitud de la vibración disminuirá. En caso de la vibración libre sin amortiguamiento, la energía total es constante y se mantiene igual al máximo, ya sea de la energía cinética o de la potencial; el sistema, por tanto, vibra continuamente.

Durante la vibración forzada con amortiguamiento, la energía se suministra continuamente desde las fuentes externas para mantener el estado de vibración estable. (Véanse los problemas 1.12-1.15.)

VIBRACION DE CUERDAS

La cuerda es un vibrador único en cuanto a sus características de medio continuo, y es el ejemplo más sencillo de un medio trasmisor de ondas. Su masa se distribuye uniformemente a lo largo de su longitud y también es el caso más simple de un sistema con un número infinito de frecuencias.

La ecuación diferencial general del movimiento es

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

donde y = deformación o desplazamiento de la cuerda,

x = coordenada a lo largo del eje longitudinal de la cuerda,

a = $\sqrt{S/\rho_L}$ = velocidad de propagación de onda,

S = tensión,

ρ_L = masa por unidad de longitud de la cuerda.

La solución general puede expresarse, bien sea como ondas estacionarias, bien sea como ondas progresivas, según las dos ecuaciones siguientes:

$$y(x,t) = \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} \left(A_i \operatorname{sen}\frac{p_i}{a}x + B_i \cos\frac{p_i}{a}x\right)(C_i \operatorname{sen} p_i t + D_i \cos p_i t)$$

donde A_i, B_i son constantes arbitrarias que deben evaluarse con las condiciones de frontera, C_i, D_i son constantes arbitrarias que deben evaluarse con las condiciones iniciales, y p_i son las frecuencias naturales del sistema;

$$y(x,t) = f_1(x-at) + f_2(x+at)$$

donde f_1 y f_2 son funciones arbitrarias. La primera parte $f_1(x - at)$ representa una onda de forma arbitraria que se desplaza en la dirección positiva de x con velocidad a, mientras que $f_2(x + at)$ representa una onda similar que se desplaza en la dirección negativa de x con velocidad a. (Véanse los problemas 1.16-1.20.)

VIBRACION LONGITUDINAL DE BARRAS

Una barra es un cuerpo material considerablemente alargado en una dirección, hecho de un material homogéneo e isotrópico, y libre de esfuerzos trasversales en toda su extensión. Si se produce un golpe repentino en la dirección de sus ejes, las características de elongación de cualquier sección recta de la barra variarán periódicamente en el tiempo pero con distintas amplitudes. Esta es la *vibración longitudinal* de las barras.

La ecuación diferencial general del movimiento es

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

donde u = desplazamiento de cualquier sección recta,

x = coordenada sobre el eje longitudinal,

a = $\sqrt{Y/\rho}$ = velocidad de propagación de la onda,

Y = módulo de elasticidad de Young,

ρ = densidad.

La solución general es la misma, como en el caso de la cuerda vibrante. (Véanse problemas 1.21-1.25.)

VIBRACION DE MEMBRANAS

Una membrana es un cuerpo material de extensión finita y espesor uniforme, que se mantiene en un marco rígido por medio de una tensión homogénea. Es completamente flexible y su espesor es muy pequeño comparado con las otras dos dimensiones. Al excitarse, se supone que ejecuta vibración libre sin amortiguamiento en la dirección perpendicular a la superficie plana de la membrana.

Una membrana vibrante es el caso físico, que se visualiza más fácilmente, de un movimiento ondulatorio en el espacio *bidimensional*. Comparada con el caso *unidimensional*, la cuerda flexible, la membrana posee mucha más libertad de movimiento.

La ecuación diferencial del movimiento está dada por

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

donde y = deformación o desplazamiento vertical de la membrana,

a = $\sqrt{S/\rho_a}$ = velocidad de propagación de la onda,

S = tensión,

ρ_a = masa por unidad de área de la membrana,

x, z = coordenadas en el plano de la membrana.

La solución general puede expresarse, bien sea como solución en serie, o bien como solución en ondas móviles, como sigue:

$$y(x,z,t) = \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} \left(A_i \operatorname{sen}\sqrt{(p_i/a)^2 - k_i^2}\,x + B_i \cos\sqrt{(p_i/a)^2 - k_i^2}\,x\right)$$
$$\times\ (C_i \operatorname{sen} k_i z + D_i \cos k_i z)(E_i \operatorname{sen} p_i t + F_i \cos p_i t)$$

donde A_i, B_i, C_i y D_i son constantes arbitrarias que deben calcularse según las condiciones de frontera, E_i y F_i son constantes arbitrarias que se determinan con las condiciones iniciales, y p_i son las frecuencias naturales de la membrana;

$$y(x,z,t) = f_1(mx + nz - at) + f_2(mx + nz + at) \qquad \text{donde } m^2 + n^2 = 1$$

Esta forma de solución representa ondas con el mismo perfil arbitrario, que se desplazan en direcciones opuestas a lo largo de los ejes x y z con velocidad a. (Véanse los problemas 1.26-1.31.)

VIBRACION DE PLACAS CIRCULARES

La vibración de placas es el análogo bidimensional de la vibración trasversal de las vigas. En contraposición con una membrana, el espesor de una placa no es pequeño comparado con las otras dimensiones. Además, las tensiones y los esfuerzos que resultan de la rigidez y la flexión de la placa, complican considerablemente la libertad casi ilimitada del movimiento de la placa.

La ecuación diferencial general del movimiento está dada por

$$\left[\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial y}{\partial r}\right]^2 + \frac{12\rho(1-\mu^2)}{Yt'^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

donde y = deformación o desplazamiento de la placa,
r = distancia radial desde el centro de la placa,
ρ = densidad de la placa,
Y = módulo de elasticidad de Young,
t' = espesor,
μ = razón de Poisson.

La solución general para la vibración libre de una placa circular es

$$y(r,t) = [AJ_0(kr) + BI_0(kr)]e^{i\omega t}$$

donde A y B son constantes arbitrarias, J_0 es la función de Bessel de la primera clase y orden cero, e I_0 es la función hiperbólica de Bessel. (Véanse los problemas 1.32-1.33.)

Problemas resueltos

ONDAS

1.1. Comprobar cada una de las adiciones de ondas:

(a) $A\cos\omega t + B\,\mathrm{sen}\,\omega t = C\,\mathrm{sen}\,(\omega t + \theta)$

(b) $A\cos\omega t + B\,\mathrm{sen}\,\omega t = C\cos(\omega t - \phi)$

donde $C = \sqrt{A^2+B^2}$, $\tan\theta = A/B$, y $\tan\phi = B/A$.

(a) $C\,\mathrm{sen}\,(\omega t+\theta) = C\,(\mathrm{sen}\,\omega t\cos\theta + \cos\omega t\,\mathrm{sen}\,\theta) = (C\cos\theta)\,\mathrm{sen}\,\omega t + (C\,\mathrm{sen}\,\theta)\cos\omega t$

Sea $(C\cos\theta) = B$, $(C\,\mathrm{sen}\,\theta) = A$. Entonces $A^2+B^2 = C^2$ o $C = \sqrt{A^2+B^2}$, y $\tan\theta = A/B$. Así

$$A\cos\omega t + B\,\mathrm{sen}\,\omega t = C\,\mathrm{sen}\,(\omega t+\theta) \quad \text{si } C = \sqrt{A^2+B^2} \text{ y } \tan\theta = A/B$$

(b) $C\cos(\omega t-\phi) = C\,(\cos\omega t\cos\phi + \mathrm{sen}\,\omega t\,\mathrm{sen}\,\phi) = (C\cos\phi)\cos\omega t + (C\,\mathrm{sen}\,\phi)\,\mathrm{sen}\,\omega t$

Sea $(C\cos\phi) = A$, $(C\,\mathrm{sen}\,\phi) = B$. Entonces $A^2+B^2 = C^2$ o $C = \sqrt{A^2+B^2}$, y $\tan\phi = B/A$. Así

$$A\cos\omega t + B\,\mathrm{sen}\,\omega t = C\cos(\omega t-\phi) \quad \text{si } C = \sqrt{A^2+B^2} \text{ y } \tan\phi = B/A$$

Las anteriores adiciones de onda también pueden encontrarse considerando los vectores rotatorios que se muestran en la figura 1-2.

Los vectores A, B y C rotan alrededor del punto O con velocidad angular constante ω. $AA_1 = OA\cos\omega t$, $BB_1 = OB\,\mathrm{sen}\,\omega t$, y $CC_1 = OC\,\mathrm{sen}\,(\omega t+\phi)$ son las proyecciones sobre el eje y de los vectores A, B y C respectivamente.

(a) Ya que el vector C es la suma de los vectores A y B, se tiene

$$CC_1 = CC_2 + C_2C_1 = AA_1 + BB_1$$

o

$$OC\,\mathrm{sen}\,(\omega t+\phi) = OA\cos\omega t + OB\,\mathrm{sen}\,\omega t$$

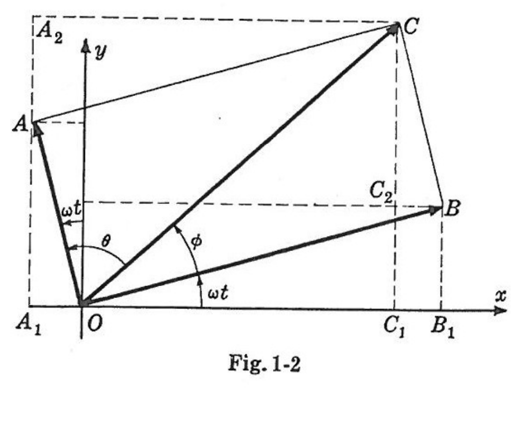


Fig. 1-2

Llamando $OA = A$, $OB = B$, $OC = C$, entonces $C = \sqrt{A^2 + B^2}$, $\tan \phi = A/B$ y se obtiene el resultado.

(*b*) Similarmente,

$$A_1A + AA_2 = A_1A + BB_1$$

o $C \cos(\omega t - \theta) = A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t$ donde $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ y $\tan \theta = B/A$.

1.2. Dos movimientos armónicos ondulatorios $x_1 = \operatorname{sen}(\omega t + 60°)$ y $x_2 = 2 \operatorname{sen} \omega t$ se propagan en la misma dirección. Encontrar el movimiento ondulatorio resultante.

El movimiento ondulatorio está dado por

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 = \operatorname{sen}(\omega t + 60°) + 2 \operatorname{sen} \omega t \\ &= \operatorname{sen} \omega t \cos 60° + \cos \omega t \operatorname{sen} 60° + 2 \operatorname{sen} \omega t \\ &= 2{,}5 \operatorname{sen} \omega t + 0{,}866 \cos \omega t = \sqrt{2{,}5^2 + 0{,}866^2} \operatorname{sen}(\omega t + \theta) \\ &= 2{,}66 \operatorname{sen}(\omega t + 19°) \end{aligned}$$

ya que $\theta = \tan^{-1}(0{,}866/2{,}5) = 19°$.

El movimiento ondulatorio resultante también puede encontrarse considerando los vectores rotatorios que se muestran en la figura 1-3. Los tres vectores A, B y C rotan con velocidad angular constante ω. Las proyecciones de los vectores A y B sobre el eje x representan los dos movimientos ondulatorios x_1 y x_2, respectivamente. El movimiento ondulatorio resultante está representado por la proyección del vector C sobre el eje x.

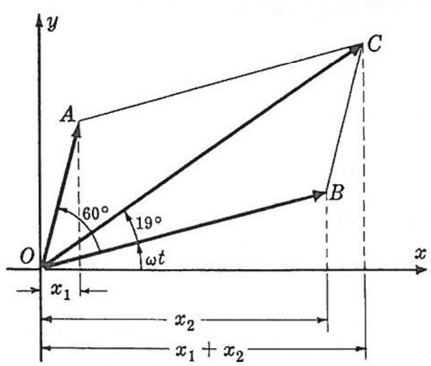


Fig. 1-3

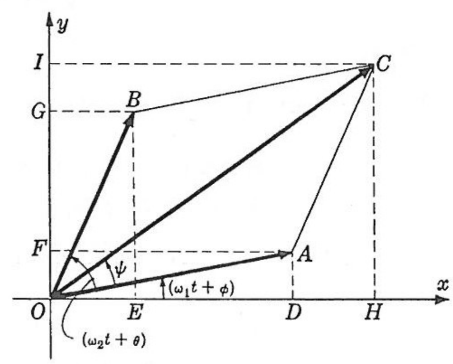


Fig. 1-4

1.3. Dadas dos ondas sinusoidales o cosinusoidales de diferentes frecuencias y amplitudes, determinar la suma de las mismas.

La suma de dos o más ondas sinusoidales o cosinusoidales es más sencilla con vectores rotatorios, como los de la figura 1-4. A y B son vectores de distintas longitudes que giran alrededor de O con velocidades angulares constantes ω_1 y ω_2 y con ángulos de fase iniciales ϕ y θ. Las proyecciones de los vectores A y B sobre el eje x son, respectivamente

$$OD = A \cos(\omega_1 t + \phi), \qquad OE = B \cos(\omega_2 t + \theta) \tag{1}$$

en donde A y B son magnitudes vectoriales. Las proyecciones correspondientes sobre el eje y son

$$OF = A \operatorname{sen}(\omega_1 t + \phi), \qquad OG = B \operatorname{sen}(\omega_2 t + \theta) \tag{2}$$

Similarmente, las proyecciones del vector C sobre los ejes x y y son

$$OH = OD + DH = OD + OE, \qquad OI = OF + FI = OF + OG \tag{3}$$

De las ecuaciones (*1*) y (*2*) tenemos

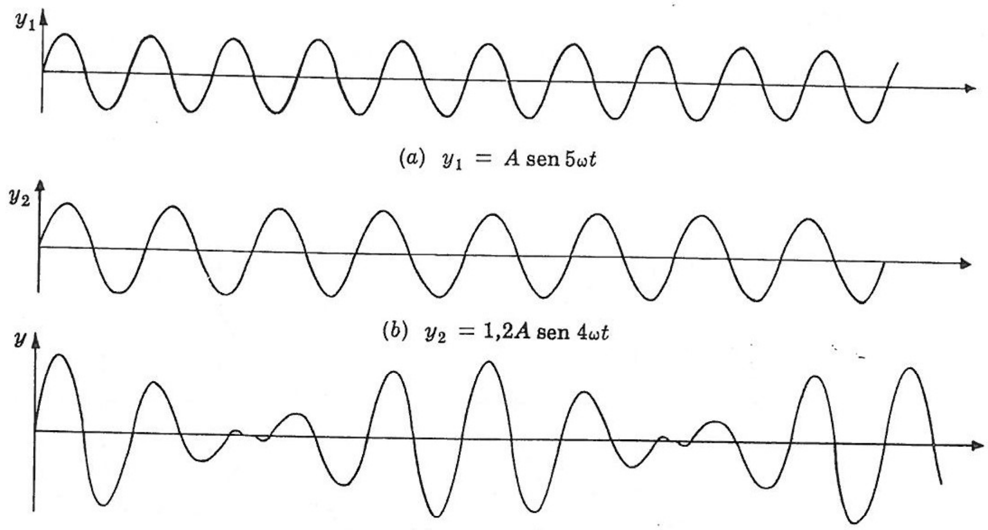
$$C \cos(\omega_1 t + \phi + \psi) = A \cos(\omega_1 t + \phi) + B \cos(\omega_2 t + \theta) \tag{4}$$

$$C \operatorname{sen}(\omega_1 t + \phi + \psi) = A \operatorname{sen}(\omega_1 t + \phi) + B \operatorname{sen}(\omega_2 t + \theta) \tag{5}$$

en donde la magnitud del vector C es $C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos[(\omega_1 - \omega_2)t + (\phi - \theta)]}$, que varía sinusoidalmente con el tiempo a una frecuencia igual a la diferencia entre las frecuencias dadas. El ángulo de fase del vector C es $\psi = \tan^{-1}\dfrac{CH}{CI} = \tan^{-1}\dfrac{A\operatorname{sen}(\omega_1 t + \phi) + B\operatorname{sen}(\omega_2 t + \theta)}{A\cos(\omega_1 t + \phi) + B\cos(\omega_2 t + \theta)}$.

De esta forma, la ecuación (4) representa la suma de dos ondas cosinusoidales, y la ecuación (5) la suma de dos ondas sinusoidales.

La figura 1-5 muestra la suma de dos ondas sinusoidales, de diferente frecuencias y amplitudes. La onda resultante es periódica pero no armónica.



(c) $y = y_1 + y_2$

Fig. 1-5

1.4. Dos ondas $A = \cos(\omega t + 30°)$ y $B = 1{,}5\operatorname{sen}(\omega t + 30°)$, salen simultáneamente de la fuente O en direcciones tales que la una es perpendicular a la otra. Determinar la onda resultante.

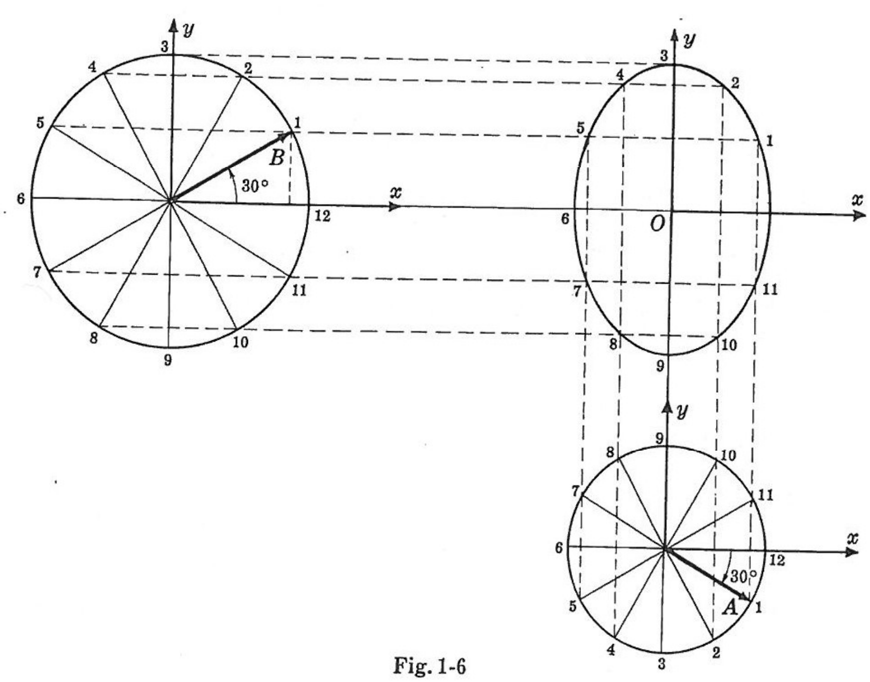


Fig. 1-6

La forma de la onda sonora resultante puede ser determinada gráficamente por medio de los vectores que rotan en el plano xy como se muestra en la figura 1-6. Las longitudes de los vectores representan las amplitudes, mientras que sus proyecciones sobre los ejes x y y representan las formas originales de las ondas. En las circunferencias de ambos círculos se señalan iguales intervalos de tiempo para el movimiento circular de los vectores. Entonces, todos estos puntos se proyectan a través del plano xy para determinar el lugar donde se encuentran los puntos, y resulta una elipse.

1.5. Dadas dos ondas $A \cos 2\omega t$ y A sen $3\omega t$ perpendiculares entre sí, determinar el movimiento resultante.

Sean $x = A \cos 2\omega t$, $y = A$ sen $3\omega t$ como se muestra en la figura 1-7. Se puede encontrar la resultante gráficamente por medio de los vectores rotatorios. Sus longitudes representan la amplitud de las ondas sonoras, y sus proyecciones sobre los ejes x y y representan la forma original de las ondas.

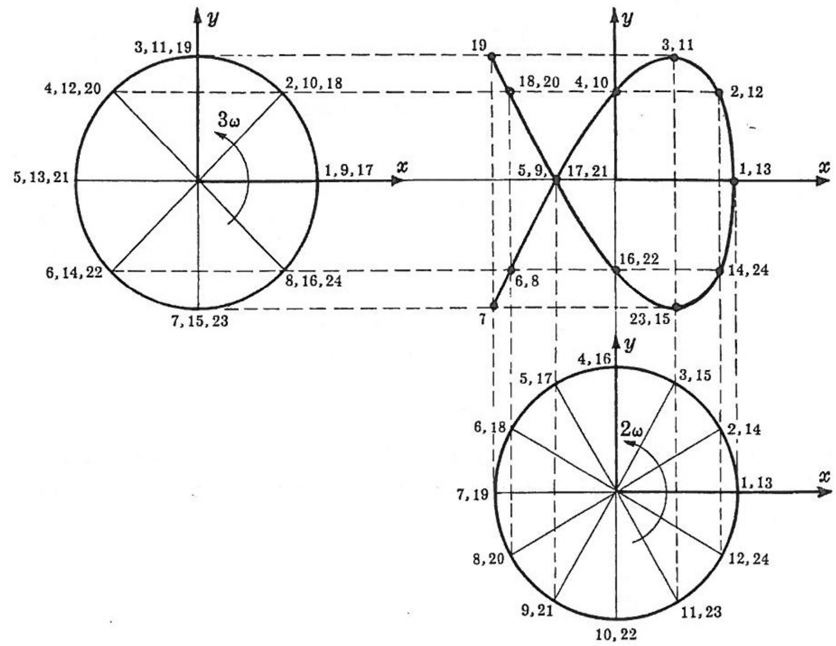


Fig. 1-7

En las circunferencias de los círculos se señalan iguales intervalos de tiempo en la razón 3:2, que es la razón de las velocidades angulares de los vectores. Todos estos puntos, desde el 1 hasta el 24 en ambas circunferencias, se proyectan a través del plano xy para determinar el lugar en donde se encuentran los puntos; la curva resultante se conoce con el nombre de figura de Lissajou. Las figuras de Lissajou se utilizan para componer una serie de movimientos cuyas frecuencias son las armónicas de la fundamental.

1.6. Dos movimientos armónicos de la misma amplitud, pero de frecuencias ligeramente diferentes, se imprimen a un cuerpo en vibración. Analizar el movimiento del cuerpo.

Sean $x_1(t) = A_0 \cos \omega t$, $x_2(t) = A_0 \cos(\omega + \Delta\omega)t$ dos movimientos armónicos. Entonces, el movimiento del cuerpo es la superposición de los dos movimientos dados:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A_0 \cos \omega t + A_0 \cos(\omega + \Delta\omega)t = A_0[\cos \omega t + \cos(\omega + \Delta\omega)t]$$

Por trigonometría tenemos que $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{1}{2}(x+y) \cos \frac{1}{2}(x-y)$. Así que,

$$x(t) = A_0[2 \cos \tfrac{1}{2}(\omega t + \omega t + \Delta\omega t) \cos(\Delta\omega/2)t] = [2A_0 \cos(\Delta\omega/2)t] \cos(\omega + \Delta\omega/2)t$$

La amplitud de $x(t)$ fluctúa entre cero y $2A_0$ de acuerdo con el término $2A_0 \cos (\Delta\omega/2)t$ mientras que el movimiento general de x es una función coseno de frecuencia angular $(\omega + \Delta\omega/2)$. Este tipo especial de movimiento se conoce con el nombre de *fenómeno de pulsación*. Cada vez que la amplitud alcanza un máximo, se dice que hay una *pulsación*. La *frecuencia de pulsación*, según se determina por dos amplitudes máximas consecutivas, es igual a

$$f_b = \frac{\Delta\omega + \omega}{2\pi} - \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \text{ ciclos/seg}$$

y el *periodo de pulsación* $P_b = 1/f_b = 2\pi/\Delta\omega$ seg. Las ondas sonoras de frecuencia ligeramente diferente también originarán pulsaciones, como se describen aquí.

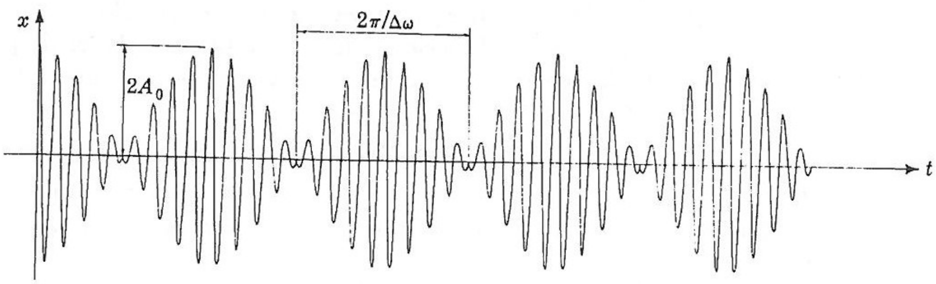


Fig. 1-8. El fenómeno de pulsación

1.7. En cada una de las figuras 1-9(*a*)-(*j*), se muestran punteadas dos ondas triangulares idénticas que se propagan en la misma dirección. Estudiar, en cada caso, la onda resultante con respecto al ángulo de fase indicado entre las dos ondas.

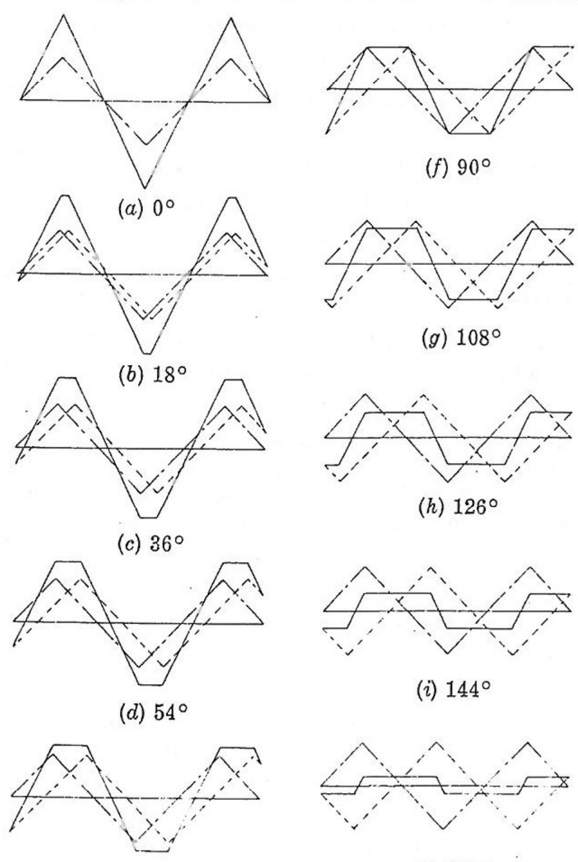


Fig. 1-9

La onda resultante (línea continua) se obtiene sumando gráficamente las dos ondas. Empezamos con un ángulo de fase cero entre las dos ondas, en la figura 1-9(*a*), o sea, las dos ondas están completamente en fase una con otra. La amplitud resultante es igual a dos veces la amplitud de las ondas dadas.

La figura 1-9(b) muestra la suma de las dos ondas idénticas con 18° de diferencia de fase entre ellas. En forma similar, desde la figura 1-9(c) hasta la figura 1-9(j), se muestran las resultantes de las sumas de las dos ondas idénticas con valores cada vez mayores del ángulo de fase entre ellas.

Cuando las dos ondas idénticas están completamente fuera de fase, es decir, el ángulo de fase estre las dos ondas es de 180 grados, la onda resultante es cero. En otras palabras, las dos ondas se anulan mutuamente.

MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE

1.8. Un movimiento armónico simple está dado por la ecuación $x(t) = 10$ sen $(10t - 30°)$, en donde x está medido en metros, t en segundos, y el ángulo de fase en grados. Encontrar: (a) la frecuencia y el periodo del movimiento, (b) el desplazamiento máximo, la velocidad y la aceleración, (c) el desplazamiento, la velocidad y la aceleración, en $t = 0$ y $t = 1$ segundos.

(a) $$x(t) = 10 \operatorname{sen}(10t - 30°) = A_0 \operatorname{sen}(\omega t - \theta)$$

Luego $\omega = 10$ rad/seg, $f = \omega/2\pi = 1{,}6$ ciclo/seg, y $p = 1/f = 0{,}63$ seg.

(b) El desplazamiento es $x(t) = 10$ sen $(10t - 30°)$. De modo que el desplazamiento máximo es 10 m.

La velocidad es $dx/dt = \omega A_0 \cos(\omega t - \theta)$. Entonces la velocidad máxima es $10(10) = 100$ m/seg.

La aceleración es $d^2x/dt^2 = -\omega^2 A_0 \operatorname{sen}(\omega t - \theta)$, por tanto, la aceleración máxima es $-10^2\,(10) = -1000$ m/seg^2.

(c) En $t = 0$:

$$x(0) = 10 \operatorname{sen}(-30°) = 10(-0{,}5) = -5 \text{ m}$$
$$\dot{x}(0) = \omega A_0 \cos(-30°) = 10(10)(0{,}866) = 86{,}6 \text{ m/seg}$$
$$\ddot{x}(0) = -\omega^2 A_0 \operatorname{sen}(-30°) = -(10)^2(10)(-0{,}5) = 500 \text{ m/seg}^2$$

En $t = 1$:

$$x(1) = 10 \operatorname{sen}(10 - 30°) \doteq 10 \operatorname{sen}(570° - 30°) \doteq 10 \operatorname{sen} 180° = 0$$
$$\dot{x}(1) = 10(10) \cos 180° = -100 \text{ m/seg}$$
$$\ddot{x}(1) = -(10)^2(10) \operatorname{sen} 180° \doteq 0$$

VIBRACION LIBRE

1.9. Determinar la ecuación diferencial del movimiento y la frecuencia natural de la vibración del sistema masa-resorte con un grado de libertad, que se muestra en la figura 1-10.

Aplicamos la ley de Newton del movimiento, $\Sigma F = ma$. Para el movimiento vertical, las fuerzas que actúan sobre la masa son la fuerza de resorte $k(\delta_{st} + x)$ y el peso mg de la masa. Entonces la ecuación diferencial del movimiento es

$$m\ddot{x} = -k(\delta_{st} + x) + mg$$

donde δ_{st} es la desviación (deflexión) estática debida al peso de la masa que actúa sobre el resorte. Entonces $mg = \delta_{st} k$, y la ecuación del movimiento se convierte en

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

la cual es la ecuación diferencial del MAS (movimiento armónico simple). Las formas generales de la solución para esta ecuación son

$$x(t) = A \operatorname{sen} \sqrt{k/m}\, t + B \cos \sqrt{k/m}\, t$$
$$x(t) = C \operatorname{sen}(\sqrt{k/m}\, t + \phi)$$
$$x(t) = D \cos(\sqrt{k/m}\, t - \theta)$$

donde A, B, C, D, ϕ y θ son constantes arbitrarias que dependen de las condiciones iniciales $x(0)$ y $\dot{x}(0)$. En cada una de las soluciones generales deben aparecer dos constantes, por cuanto esta es una ecuación diferencial de segundo orden.

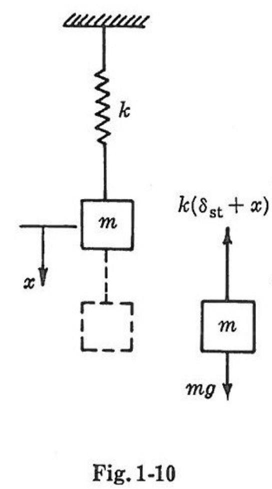


Fig. 1-10

Para un desplazamiento inicial de $x(0) = x_0$ y velocidad inicial cero $\dot{x}(0) = 0$, tenemos $A = 0$, $B = x_0$, y entonces

$$x(t) = x_0 \cos \sqrt{k/m}\, t$$

Físicamente, la solución representa una vibración libre sin amortiguamiento y se completa un ciclo cuando $\sqrt{k/m}\, t$ varía 360 grados. Entonces, el período P y la frecuencia natural f_n son

$$P = \frac{2\pi}{\sqrt{k/m}} \text{ seg} \quad \text{y} \quad f_n = 1/P = \frac{\sqrt{k/m}}{2\pi} \text{ ciclos/seg}$$

donde $\omega_n = \sqrt{k/m}$ rad/seg es la frecuencia natural angular del sistema.

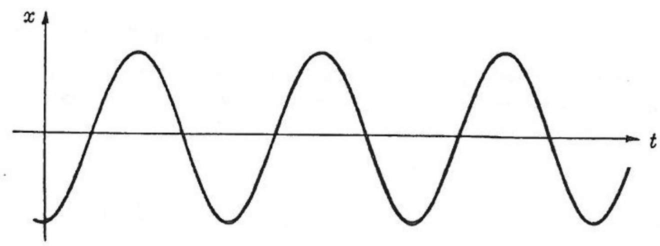


Fig. 1-11 Vibración libre sin amortiguamiento

1.10. En la figura 1-12 se muestra un sistema general masa-resorte con un grado de libertad y con amortiguamiento. Investigar su movimiento general.

Empleando la ley de Newton sobre el movimiento $\Sigma F = ma$,

$$m\ddot{x} = -c\dot{x} - kx \quad \text{o} \quad m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

en donde k es la constante del resorte, m la masa, y c el coeficiente de amortiguamiento.

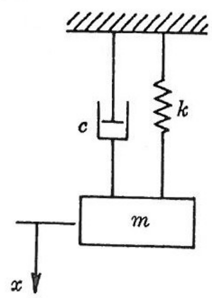


Fig. 1-12

No podemos pensar en soluciones seno o coseno, por la presencia del término $c\dot{x}$. Supongamos que $x = e^{rt}$; entonces $\dot{x} = re^{rt}$, $\ddot{x} = r^2e^{rt}$. Sustituyendo estos valores en la ecuación diferencial del movimiento, obtenemos:

$$mr^2e^{rt} + cre^{rt} + ke^{rt} = 0 \quad \text{o} \quad mr^2 + cr + k = 0$$

Los dos valores de r que satisfacen la anterior ecuación son:

$$r_1, r_2 = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} = (-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n$$

en donde $\omega_n = \sqrt{k/m}$, y $\zeta = c/2m\omega_n$ se llama factor de amortiguamiento. De esta forma el resultado de la ecuación de movimiento es

$$x(t) = Ae^{r_1t} + Be^{r_2t}$$

en donde A y B son constantes arbitrarias determinadas por las dos condiciones iniciales impuestas al sistema.

Como quiera que los valores de r dependen de la magnitud de ζ, obtenemos los tres casos siguientes de vibración libre con amortiguamiento:

Caso 1: Si ζ es mayor que la unidad, los valores de r son reales y distintos; la amplitud de x es decreciente pero nunca cambiará de signo. Por este motivo no es posible un movimiento oscilatorio del sistema, cualesquiera que sean las condiciones iniciales. Este es el caso de *sobreamortiguamiento,* donde

$$x(t) = Ae^{-r_1t} + Be^{-r_2t}$$

Caso 2: Si ζ es igual a la unidad, los valores de r son reales y negativos, y son iguales a $-\omega_n$. El movimiento del sistema es nuevamente no-oscilatorio, y su amplitud se reducirá eventualmente a cero. Este es el caso de *amortiguamiento crítico,* donde

$$x(t) = (C + Dt)e^{-\omega_n t}$$

Caso 3: Si ζ es menor que la unidad, los valores de r son conjugados complejos:

$$r_1 = \omega_n(-\zeta + i\sqrt{1-\zeta^2}), \qquad r_2 = \omega_n(-\zeta - i\sqrt{1-\zeta^2})$$

Y si definimos $\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n$ como la frecuencia natural amortiguada en rad/seg, tenemos:

$$r_1 = -\zeta\omega_n + i\omega_d, \qquad r_2 = -\zeta\omega_n - i\omega_d$$

y
$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}(Ee^{i\omega_d t} + Fe^{-i\omega_d t})$$

O sea,
$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}[(E+F)\cos\omega_d t + i(E-F)\,\text{sen}\,\omega_d t]$$

Llamando $E+F = G$ e $i(E-F) = H$, obtenemos finalmente,

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}(G\cos\omega_d t + H\,\text{sen}\,\omega_d t)$$

Como se demostró anteriormente, es posible combinar una función seno y una función coseno de la misma frecuencia en una función única seno o coseno sencilla, en la forma

$$x(t) = Ie^{-\zeta\omega_n t}\,\text{sen}\,(\omega_d t + \theta)$$

$$x(t) = Ie^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_d t - \phi)$$

en donde $I = \sqrt{G^2+H^2}$, $\theta = \tan^{-1}(G/H)$, $\phi = \tan^{-1}(H/G)$.

El movimiento es oscilatorio con frecuencia angular ω_d. La amplitud del movimiento decrecerá exponencialmente con el tiempo a causa del término $e^{-\zeta\omega_n t}$, que se conoce con el nombre de *factor de decaimiento*. Esta es una vibración subamortiguada. (Ver figura 1-13.)

A partir de esto podemos concluir que el movimiento de un sistema dinámico con amortiguamiento y con vibración libre, depende de la cantidad de amortiguamiento existente en el sistema. El movimiento resultante sólo será periódico si la cantidad de amortiguamiento existente es menor de la crítica, y entonces el sistema oscila con frecuencia angular ligeramente menor que la frecuencia natural libre del sistema.

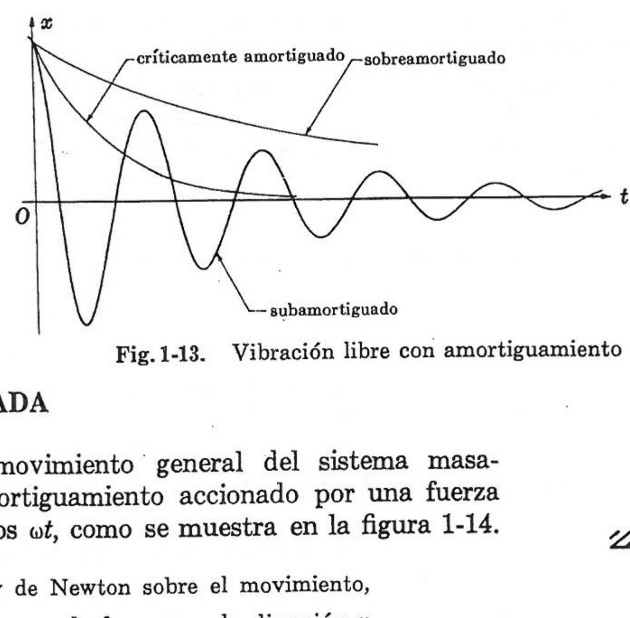


Fig. 1-13. Vibración libre con amortiguamiento

VIBRACION FORZADA

1.11. Investigar el movimiento general del sistema masa-resorte con amortiguamiento accionado por una fuerza sinusoidal $F_0 \cos \omega t$, como se muestra en la figura 1-14.

Empleando la ley de Newton sobre el movimiento,

$$m\ddot{x} = \text{la suma de fuerzas en la dirección } x$$
$$= -k(x+\delta_{st}) + mg - c\dot{x} + F_0\cos\omega t$$

Pero $k\delta_{st} = mg$, el peso de la masa; a partir de esto, la ecuación del movimiento toma su forma más general

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0\cos\omega t$$

La solución general de esta ecuación diferencial se segundo orden con coeficientes constantes es,

$$x = x_c + x_p$$

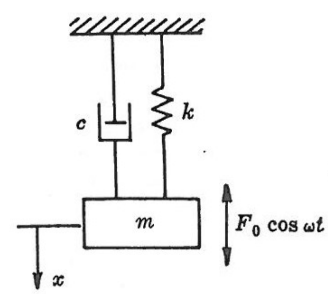


Fig. 1-14

en donde x_c se llama solución complementaria, o solución de la ecuación homogénea, $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$; x_p es la solución particular de la ecuación dada.

La solución complementaria, que se conoce con el nombre de vibración libre, ya ha sido resuelta en el problema 1-10. La solución particular, obtenida de la parte no homogénea $F_0 \cos \omega t$, de la ecuación diferencial del movimiento es

$$x_p(t) = A \operatorname{sen} \omega t + B \cos \omega t$$

y así

$$\dot{x}_p(t) = \omega A \cos \omega t - \omega B \operatorname{sen} \omega t$$

$$\ddot{x}_p(t) = -\omega^2 A \operatorname{sen} \omega t - \omega^2 B \cos \omega t$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación del movimiento, obtenemos

$$(kA - mA\omega^2 - c\omega B) \operatorname{sen} \omega t + (kB - mB\omega^2 + c\omega A) \cos \omega t = F_0 \cos \omega t$$

Igualando coeficientes,

$$(k - m\omega^2)A - c\omega B = 0, \qquad c\omega A + (k - m\omega^2)B = F_0$$

de la cual

$$A = \frac{F_0 \omega c}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}, \qquad B = \frac{F_0(k - m\omega^2)}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}$$

Luego

$$x_p(t) = \frac{F_0 \omega c}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2} \operatorname{sen} \omega t + \frac{F_0(k - m\omega^2)}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2} \cos \omega t$$

Podríamos combinar estas dos funciones sinusoidales de la misma frecuencia, bien por medio de vectores rotatorios o bien utilizando las identidades trigonométricas, para obtener

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \cos(\omega t - \phi)$$

o

$$x_p(t) = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \cos(\omega t - \phi)$$

en donde $r = \omega/\omega_n$, $\omega_n = \sqrt{k/m}$, y $\phi = \tan^{-1} \dfrac{c\omega}{k - m\omega^2} = \tan^{-1} \dfrac{2\zeta r}{1 - r^2}$.

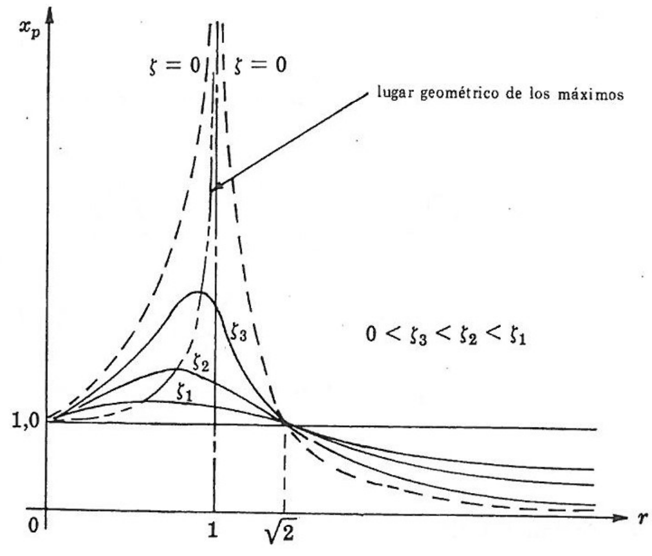


Fig. 1-15

De aquí se puede concluir que la solución particular $x_p(t)$, conocida con el nombre *respuesta del estado estable o vibración forzada*, tiene la misma frecuencia que la fuerza excitante, independientemente de las condiciones iniciales. La amplitud de la vibración forzada depende de la amplitud y de la frecuencia de la fuerza excitante, y de los parámetros de los sistemas. En caso de *resonancia*, o sea, cuando la frecuencia de la fuerza es igual a la frecuencia natural, o sea, $\omega/\omega_n = 1$, la amplitud de la vibración forzada está limitada únicamente por el factor de amortiguamiento ζ, y en consecuencia, de la cantidad de amortiguamiento presente. Entonces, se debe evitar siempre el estado de resonancia. Finalmente, la respuesta del estado estable del sistema no está en fase con la fuerza excitante; existe la diferencia de fase ϕ debida a la presencia de la amortiguación en el sistema. Sin amortiguamiento, la respuesta del estado estable está, bien en fase, o bien, 180° fuera de fase, con respecto a la fuerza excitante. Véanse las figuras 1-15 a 1-19.

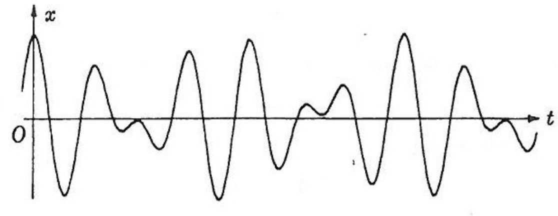


Fig. 1-16. Vibración forzada con amortiguamiento ($2f_n = 3f$)

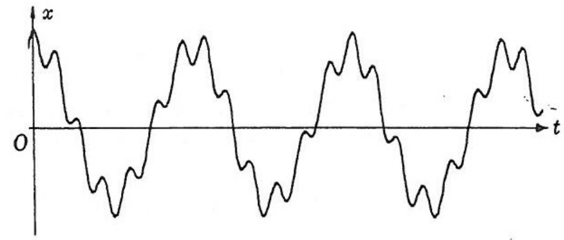


Fig. 1-17. Vibración forzada sin amortiguamiento ($f_n = 6{,}28\,f$)

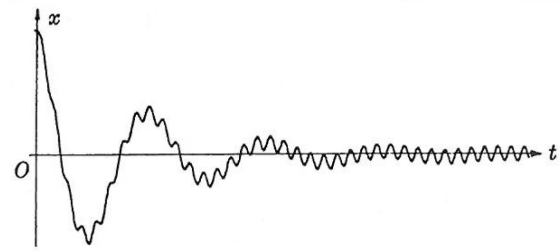


Fig. 1-18. Vibración forzada con amortiguamiento ($f_n = 6{,}28\,f$)

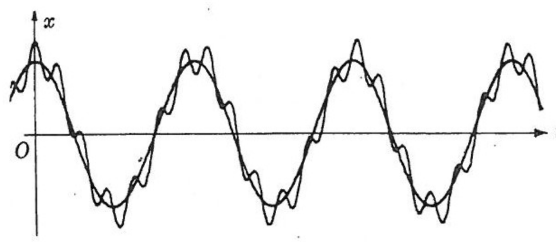


Fig. 1-19. Vibraciones libre y forzada ($f_n = 6{,}28\,f$)

ENERGIA DE VIBRACION

1.12. Determinar la potencia necesaria para prueba de vibración y para análisis de vibración.

En la prueba de vibración, tenemos vibración forzada. El trabajo realizado es el producto de la excitación y el desplazamiento, mientras que la potencia requerida es la tasa de trabajo efectuado. Hagamos $F = F_0 \cos \omega t$ y $x = A \cos (\omega t - \phi)$; entonces el trabajo realizado es

$$W = \int F\,dx = \int F_0 \cos \omega t[-A \operatorname{sen} (\omega t - \phi)\ d(\omega t)]$$

y el trabajo realizado por ciclo de movimiento es

$$W = -F_0 A \int_0^{2\pi} \cos \omega t \operatorname{sen}(\omega t - \phi)\, d(\omega t)$$

cuando el ángulo ωt pasa por un ciclo de 2π. Teniendo en cuenta que $\operatorname{sen}(\omega t - \phi) = \operatorname{sen} \omega t \cos \phi - \cos \omega t \operatorname{sen} \phi$, el trabajo realizado por ciclo de movimiento se convierte en

$$\begin{aligned} W &= F_0 A \operatorname{sen} \phi \int_0^{2\pi} \cos^2 \omega t\, d(\omega t) - F_0 A \cos \phi \int_0^{2\pi} \cos \omega t \operatorname{sen} \omega t\, d(\omega t) \\ &= F_0 A \operatorname{sen} \phi \left[\frac{\omega t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2\omega t}{4}\right]_0^{2\pi} - F_0 A \cos \phi \left[\frac{\operatorname{sen}^2 \omega t}{2}\right]_0^{2\pi} \\ &= F_0 A \operatorname{sen} \phi \left[\frac{\omega t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2\omega t}{4}\right]_0^{2\pi} - F_0 A \cos \phi \left[\frac{1}{4} - \frac{\cos 2\omega t}{2}\right]_0^{2\pi} \\ &= \pi A F_0 \operatorname{sen} \phi \end{aligned}$$

Si $F = F_0 \operatorname{sen} \omega t$ y $x = A \operatorname{sen}(\omega t - \phi)$, entonces tenemos que el trabajo realizado es

$$W = \int F\, dx = \int F \frac{dx}{dt}\, dt = \int F \dot{x}\, dt$$

La expresión del trabajo realizado en un ciclo de movimiento se torna entonces en

$$W = \int_0^{2\pi/\omega} F_0 \operatorname{sen} \omega t [\omega A \cos(\omega t - \phi)\, dt] = \int_0^{2\pi/\omega} F_0 A \omega \operatorname{sen} \omega t \cos(\omega t - \phi)\, dt$$

Teniendo en cuenta que $\cos(\omega t - \phi) = \cos \omega t \cos \phi + \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} \phi$,

$$W = \int_0^{2\pi/\omega} \omega A F_0 \operatorname{sen} \omega t \cos \omega t \cos \phi\, dt + \int_0^{2\pi/\omega} \omega A F_0 \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen}^2 \omega t\, dt$$

Como se demostró anteriormente, la expresión anterior puede reducirse a

$$\begin{aligned} W &= \left[A F_0 \omega \cos \phi \frac{\operatorname{sen}^2 \omega t}{2} + A F_0 \omega \operatorname{sen} \phi \left(\frac{t}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2\omega t}{4\omega}\right)\right]_0^{2\pi/\omega} \\ &= \left[A F_0 \omega \cos \phi \left(\frac{1}{4\omega} - \frac{\cos 2\omega t}{4\omega}\right) + A F_0 \omega \operatorname{sen} \phi \left(\frac{t}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2\omega t}{4\omega}\right)\right]_0^{2\pi/\omega} \\ &= \pi A F_0 \operatorname{sen} \phi \end{aligned}$$

De esta forma, la potencia requerida es proporcional a la amplitud F_0 de la fuerza excitante, como también a la amplitud A del desplazamiento. Cuando no existe amortiguamiento en el sistema, el trabajo realizado por la fuerza impulsora es cero, ya que $\phi = 0°$ o $180°$. En resonancia, la energía se consume para aumentar la amplitud de la vibración; y en este caso, $\phi = 90°$.

1.13. La respuesta del estado estable de un sistema dinámico simple a una excitación sinusoidal $10 \operatorname{sen} 0{,}1\pi t$ newton es $0{,}1 \operatorname{sen}(0{,}1\pi t - 30°)$ metros. Determinar el trabajo realizado por la fuerza excitante en (*a*) un minuto, y en (*b*) un segundo.

(*a*) Según el problema 1.12, el trabajo realizado en un ciclo por la fuerza excitante está dado por

$$W = \int_0^{2\pi} F\, dx = \int_0^{P} F\dot{x}\, dt = \pi A F_0 \operatorname{sen} \phi$$

en donde $F_0 = 10$ newtons es la amplitud de la fuerza excitante, $A = 0{,}1$ m es la amplitud de la respuesta del estado estable, y $\phi = 30°$ es el ángulo de fase. Por lo tanto, el trabajo realizado por la fuerza excitante es $W = 3{,}14(0{,}1)(10)(0{,}5) = 1{,}57$ julios/ciclo. La frecuencia angular es $0{,}1\pi$ rad/seg, y el periodo $P = 1/f = 20$ seg. En un minuto, la fuerza excitante completará tres ciclos. Entonces el trabajo hecho por la fuerza excitante, en un minuto, es 4,71 julios.

(*b*) El trabajo realizado por ciclo es $W = \int_0^{20} F\dot{x}\, dt$. Entonces el trabajo realizado en un segundo es

$$W = \int_0^{1} (10 \operatorname{sen} 0{,}1\pi t)(0{,}01\pi) \cos(0{,}1\pi t - 30°)\, dt = 0{,}05 \text{ julios}$$

1.14. Probar que la energía cinética media y la energía potencial media, de un sistema vibratorio no disipativo, son iguales.

Para la vibración libre sin amortiguamiento, se asume que el movimiento es armónico, y está dado por

$$x(t) = A \operatorname{sen} \omega_n t$$

La energía cinética $EC = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m(\omega_n^2 A^2 \cos^2 \omega_n t) = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2 \omega_n t$, donde $\omega_n^2 = k/m$.

La energía potencial $EP = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \operatorname{sen}^2 \omega_n t$.

$$(EC)_{md} = \frac{1}{P}\int_0^P (\tfrac{1}{2}kA^2 \cos^2 \omega_n t)\, dt = \tfrac{1}{4}kA^2$$

$$(EP)_{md} = \frac{1}{P}\int_0^P (\tfrac{1}{2}kA^2 \operatorname{sen}^2 \omega_n t)\, dt = \tfrac{1}{4}kA^2$$

1.15. Una cuerda uniforme fija en ambos extremos se desplaza una distancia h en el centro, y luego se deja libre, como se ve en la figura 1-20. Encontrar la energía de la vibración trasversal de la cuerda.

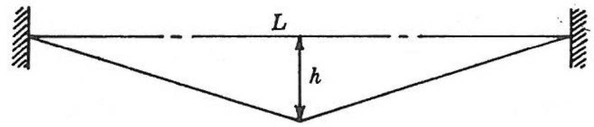


Fig. 1-20

La vibración trasversal libre de una cuerda uniforme se puede expresar como

$$y(x,t) = \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} A_i \operatorname{sen}\frac{i\pi x}{L} \cos\left(\frac{i\pi a}{L}t + \theta_i\right)$$

en donde A_i es la amplitud del movimiento y θ_i es el ángulo de fase. (Véase el problema 1.17.) Entonces

$$EC = \tfrac{1}{2}\rho_L \int_0^L \dot{y}^2\, dx = \frac{\rho_L a^2 \pi^2}{4L} \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} i^2 A^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{i\pi a}{L}t + \theta_i\right)$$

$$EP = \tfrac{1}{2}S \int_0^L \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right]^2 dx = \frac{S\pi^2}{4L} \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} i^2 A_i^2 \cos^2\left(\frac{i\pi a}{L}t + \theta_i\right)$$

o

$$EC + EP = \frac{\pi^2 a^2 \rho_L}{4L} \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} i^2 A_i^2$$

en donde S es la tensión de la cuerda, ρ_L es la masa por unidad de longitud de la cuerda, y $a = \sqrt{S/\rho_L}$ es la velocidad de propagación de la onda.

De las condiciones iniciales $\dot{y}(x,0) = 0$ y $y(x,0) = \begin{cases} 2hx/L, & 0 \leq x \leq L/2 \\ 2h(1 - x/L), & L/2 \leq x \leq L \end{cases}$ obtenemos $A_i^2 = 64h^2/i^2\pi^2$. La expresión para la energía de la vibración trasversal de la cuerda se convierte en,

$$EC + EP = 16\rho_L a^2 h^2/\pi^2 i^2 L, \quad i = 1, 3, \ldots$$

Llamemos a la energía total, asociada con el modo fundamental de vibración, E_1, o sea

$$E_1 = 16\rho_L a^2 h^2 / L\pi^2$$

Entonces las energías asociadas con el primer armónico, segundo armónico, tercer armónico, . . . son respectivamente

$$E_3 = E_1/9, \quad E_5 = E_1/25, \quad E_7 = E_1/49, \quad \ldots$$

De esta manera la mayor parte de la energía de la vibración está asociada con los modos normales del orden inferior. La calidad de un tono está regida por la cantidad de energía en cada uno de los modos de vibración. Aunque la frecuencia fundamental puede ser la misma, la distribución de energía en los armónicos, caracteriza cada instrumento musical.

VIBRACION DE LAS CUERDAS

1.16. Investigar la vibración trasversal de una cuerda extendida, de longitud L en un plano, suponiendo que la tensión S de la cuerda permanece constante.

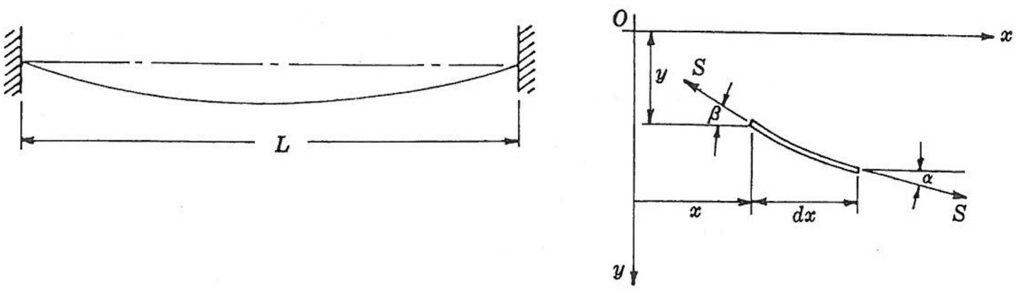


Fig. 1-21

En general, se puede suponer que la cuerda flexible no ofrece resistencia a la flexión ni a la cizalladura, y que su tensión es constante cuando se trata de desplazamientos pequeños.

La ecuación diferencial de movimiento de un elemento infinitesimal de la cuerda, como se muestra en la figura 1-21, se puede escribir como sigue

$$\sum F = m\ddot{y}$$

o

$$(\rho_L\,\Delta x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -S\,\text{sen}\,\beta + S\,\text{sen}\,\alpha$$

en donde ρL es la masa por unidad de longitud de la cuerda, y S es la tensión en la cuerda. Las derivadas parciales deben utilizarse ya que existen 2 variables independientes, x y t.

Pero $\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]_{x=x} = \tan\beta$, $\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]_{x=x+\Delta x} = \tan\alpha$. Y para desplazamientos pequeños, sen $\alpha \doteq$ tan α y sen $\beta \doteq$ tan β. Y como quiera que

$$(\rho_L\,\Delta x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -S\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]_{x=x} + S\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]_{x=x+\Delta x}$$

o

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{(S/\rho_L)[(\partial y/\partial x)_{x+\Delta x} - (\partial y/\partial x)_x]}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{S}{\rho_L}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

lo que generalmente se conoce con el nombre de la ecuación de onda unidimensional, y ordinariamente se escribe

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

remplazando $\sqrt{S/\rho_L}$ por la constante a.

La solución de esta ecuación de onda se puede encontrar por el método de "separación de variables". Como quiera que y es una función de x y t, se puede representar como

$$y(x,t) = X(x)\cdot T(t)$$

Entonces $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = T\frac{d^2X}{dx^2}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = X\frac{d^2T}{dt^2}$$

y la ecuación de onda se torna en $$X\frac{d^2T}{dt^2} = a^2 T\frac{d^2X}{dx^2}$$

Separando las variables, $$\frac{d^2T/dt^2}{T} = a^2\frac{d^2X/dx^2}{X}$$

Como X y T son independientes una de otra, la expresión anterior debe ser igual a cierta constante. Esta constante es $-p^2$. Entonces esto nos conduce a dos ecuaciones diferenciales ordinarias,

$$\frac{d^2T}{dt^2} + p^2T = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{d^2X}{dx^2} + \frac{p^2}{a^2}X = 0$$

y la solución es

$$y(x,t) = \left(A \operatorname{sen}\frac{px}{a} + B \cos\frac{px}{a}\right)(C \operatorname{sen} pt + D \cos pt)$$

Con ambos extremos de la cuerda fijos, las condiciones de frontera son

$$y(0,t) = 0 \tag{1}$$

$$y(L,t) = 0 \tag{2}$$

De la condición (1),

$$0 = B(C \operatorname{sen} pt + D \cos pt) \qquad \text{o} \qquad B = 0$$

y de la condición (2),

$$0 = (A \operatorname{sen} pL/a)(C \operatorname{sen} pt + D \cos pt)$$

Ya que A no siempre será igual a cero, sen pL/a debe ser igual a cero. Entonces la ecuación de la frecuencia es

$$\operatorname{sen} pL/a = 0$$

y las frecuencias naturales de la cuerda están dadas por

$$p_i = i\pi a/L \qquad \text{donde } i = 1, 2, 3, \ldots$$

Es claro que existe un número infinito de frecuencias naturales; esto está de acuerdo con el hecho de que todos los sistemas continuos están compuestos de un número infinito de partículas de masa.

Para esta configuración particular de la cuerda vibrante, o sea, con ambos extremos fijos, la función normal $X(x)$ está dada por

$$X_i(x) = \operatorname{sen} i\pi x/L$$

y

$$y(x,t) = (A \operatorname{sen} px/a)(C \operatorname{sen} pt + D \cos pt)$$

En general, la expresión de la cuerda vibrante está dada por

$$y(x,t) = \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} \left(\operatorname{sen}\frac{i\pi x}{L}\right)(C_i \operatorname{sen} p_i t + D_i \cos p_i t)$$

en la cual, el principio de superposición se ha utilizado para representar los distintos modos naturales de vibración de la cuerda. C_i y D_i son constantes arbitrarias que deben evaluarse por las condiciones iniciales del sistema.

1.17. Una cuerda uniforme, de longitud L y tensión inicial alta, se desplaza rígidamente h unidades del centro y se deja libre, como se muestra en la figura 1-22. Encontrar sus desplazamientos subsecuentes.

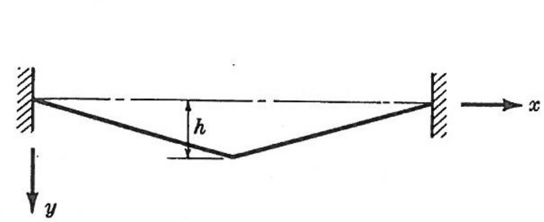


Fig. 1-22

La expresión general de la vibración libre de una cuerda fija en ambos extremos es

$$y(x,t) = \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} \left(\operatorname{sen}\frac{i\pi x}{L}\right)(A_i \operatorname{sen} p_i t + B_i \cos p_i t)$$

Las condiciones iniciales son:

$$\dot{y}(x,0) = 0, \qquad y(x,0) = \begin{cases} 2hx/L, & 0 \leq x \leq L/2 \\ 2h(1 - x/L), & L/2 \leq x \leq L \end{cases}$$

las cuales equivalen a:

$$y(x,0) = \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} B_i \operatorname{sen}\frac{i\pi x}{L}, \qquad \dot{y}(x,0) = \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} A_i p_i \operatorname{sen}\frac{i\pi x}{L}$$

En consecuencia, $A_i = 0$, y,

$$\sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} B_i \operatorname{sen}\frac{i\pi x}{L} \quad = \quad \begin{cases} 2hx/L, & 0 \leqq x \leqq L/2 \\ 2h(1-x/L), & L/2 \leqq x \leqq L \end{cases}$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación anterior por sen $i\pi x/L$, e integrándolos entre los límites $x = 0$ y $x = L$, obtenemos

$$\int_0^L B_i \operatorname{sen}\frac{i\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{i\pi x}{L}\,dx \quad = \quad \int_0^{L/2}\frac{2hx}{L}\operatorname{sen}\frac{i\pi x}{L}\,dx + \int_{L/2}^{L} 2h\left(1-\frac{x}{L}\right)\operatorname{sen}\frac{i\pi x}{L}\,dx$$

o

$$LB_i/2 \quad = \quad \frac{2h}{L}\left[\int_0^{L/2} x\operatorname{sen}\frac{i\pi x}{L}\,dx + \int_{L/2}^{L}(L-x)\operatorname{sen}\frac{i\pi x}{L}\,dx\right]$$

y así

$$B_i \;=\; (-1)^{(i-1)/2}\frac{8h}{i^2\pi^2} \qquad \text{donde } i = 1, 3, \ldots$$

Las frecuencias naturales están dadas por

$$p_i = \frac{i\pi a}{L} \qquad \text{o} \qquad p_1 = \frac{\pi a}{L},\quad p_3 = \frac{3\pi a}{L},\quad p_5 = \frac{5\pi a}{L},\quad \ldots$$

Entonces la expresión del desplazamiento de la cuerda es

$$y(x,t) \quad = \quad \sum_{i=1,3,\ldots}^{\infty} (-1)^{(i-1)/2}\left[\frac{8h}{i^2\pi^2}\right]\operatorname{sen}\frac{i\pi x}{L}\cos\frac{i\pi a}{L}t$$

en donde $a = \sqrt{S/\rho_L}$ es la velocidad de propagación de la onda, S es la tensión en la cuerda, y ρ_L es la ~~densidad~~ por unidad de longitud de la cuerda.

1.18. Una cuerda flexible, de 0,99 m de longitud y masa 0,001 kg, se extiende con una tensión de S newtons. Si la cuerda vibra en tres segmentos con una frecuencia de 500 ciclos/seg, encontrar la tensión desconocida S.

Si la cuerda vibra en 3 segmentos, la longitud de onda es $\lambda = 2L/3 = 2(0{,}99)/3 = 0{,}66$ m, y la velocidad de propagación de la onda trasversal es $a = \lambda f = 0{,}66(500) = 330$ m/seg.

Ahora $a^2 = S/\rho L$ en donde ρL es la masa de la cuerda por unidad de longitud, entonces,

$$S \;=\; a^2\rho_L \;=\; (330)^2\,(0{,}001/0{,}99) = 110 \text{ newtons}$$

1.19. Una cuerda uniforme, de longitud L y fija en ambos extremos, se deja libre con velocidad inicial cero desde la posición de desplazamiento como se ve en la figura 1-23 (a). Utilizando el método de desplazamiento de onda, hacer el bosquejo de la forma de la cuerda a intervalos de tiempo de $L/8a$, durante medio ciclo de movimiento de la cuerda.

Como se muestra en las figuras siguientes, las líneas continuas representan la forma real de la cuerda, y las líneas punteadas las ondas que se propagan en direcciones opuestas. Considerando cualquier momento, la forma de la cuerda es la configuración resultante de las ondas en movimiento.

La forma de la onda en movimiento está determinada por el desplazamiento inicial de la cuerda. Aquí, como se muestra en la figura 1-23(b), es la forma de un triángulo de altura $h/2$. La configuración inicial de la cuerda está formada por dos ondas en movimiento, idénticas en la parte superior de cada una de ellas, pero moviéndose en direcciones opuestas.

Al terminar el primer intervalo de tiempo $L/8a$ (en donde a es la velocidad de las ondas en movimiento), las ondas en movimiento han recorrido una distancia de $L/8$, una hacia la derecha y la otra hacia la izquierda. La configuración de la cuerda en este momento es la resultante de las dos ondas en movimiento, y esto se demuestra en la figura 1-23(c).

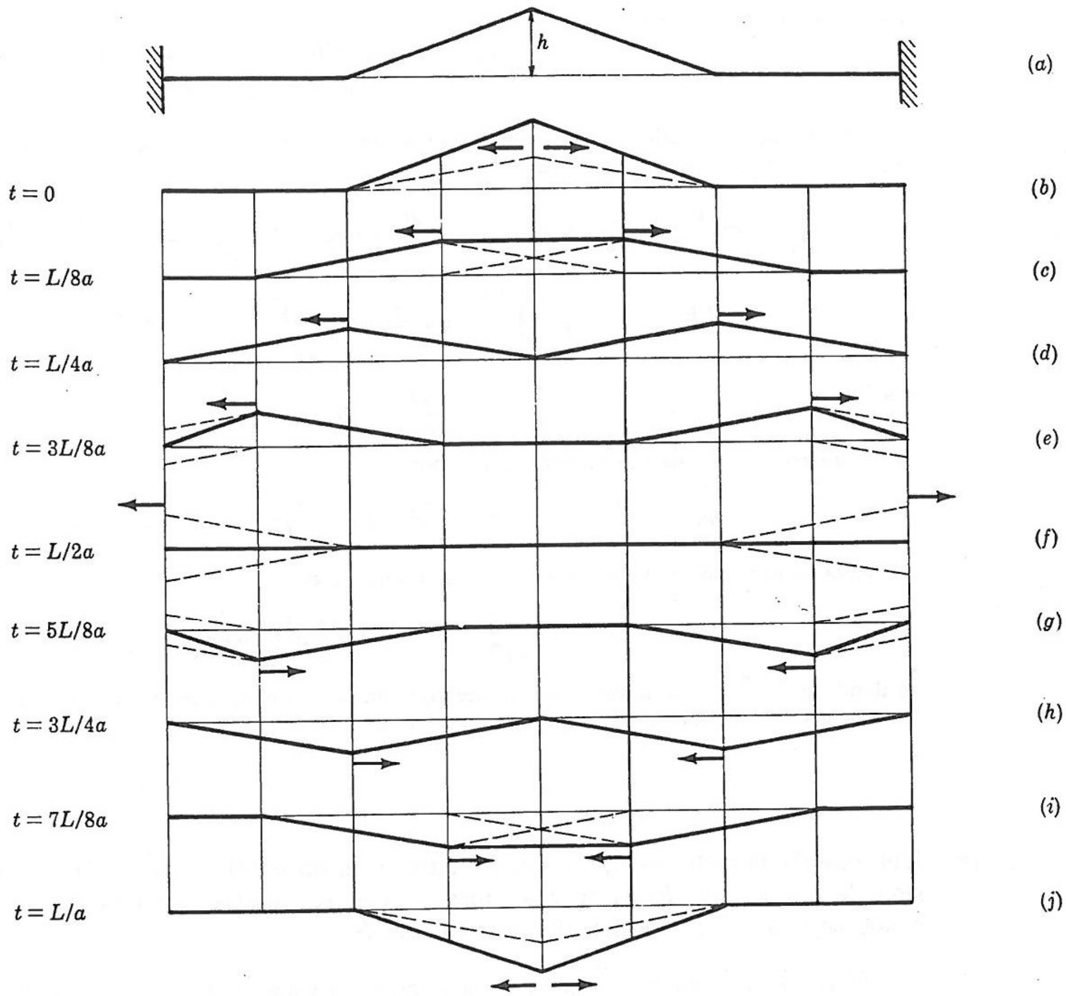


Fig. 1-23

Cuando las ondas alcanzan los extremos fijos de la cuerda, como se muestra en la figura 1-23(*e*), se reflejan y cambian de signo. Después de esto, las ondas continúan moviéndose como se muestra en el resto de las figuras. Este procedimiento continúa durante el resto del ciclo. Al final del ciclo, o sea, cuando $t = 2L/a$, el ciclo se repite. Cuando no existe amortiguamiento, este procedimiento continúa indefinidamente y tanto las amplitudes como las formas de las ondas permanecen iguales.

Sin embargo, la representación de la onda en movimiento, correspondiente a la vibración trasversal de una cuerda, es muy complicada si la velocidad inicial no es igual a cero.

1.20. Estudiar el movimiento ondulatorio y la trasmisión de energía en la vibración trasversal de una *cuerda compuesta*, como se muestra en la figura 1-24.

Para tener en cuenta el cambio de fase y el cambio en la densidad de masa de la cuerda, utilizaremos la exponencial compleja para representar las ondas progresivas armónicas de la cuerda:

$$y_1(x,t) = Ae^{i\omega(t-x/a_1)} + Be^{i\omega(t+x/a_1)} \quad (1)$$

$$y_2(x,t) = Ce^{i\omega(t-x/a_2)} \quad (2)$$

En donde $a_1 = \sqrt{S/(\rho_L)_1}$, $a_2 = \sqrt{S/(\rho_L)_2}$; S es la tensión en la cuerda, y ρ_L es la masa por unidad de longitud de la cuerda. En el miem-

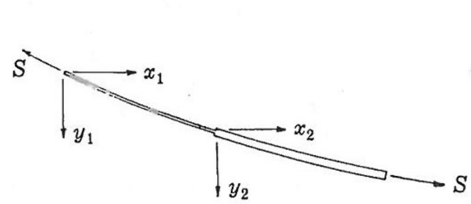


Fig. 1-24

bro de la derecha de la ecuación (*1*), el primer término se refiere a la onda incidente que se mueve en la dirección positiva de x, con velocidad a_1, el segundo término se refiere a la onda reflejada que viaja en la dirección negativa de x con velocidad a_1; $y_2(x,t)$ representa la onda en movimiento trasmitida en la dirección positiva de x, con velocidad a_2.

Tanto los desplazamientos como las fuerzas dadas por las dos expresiones y_1 y y_2, deben ser las mismas en la unión de la cuerda, o sea:

$$(y_1)_{x=0} = (y_2)_{x=0} \tag{3}$$

$$S(\partial y_1/\partial x)_{x=0} = S(\partial y_2/\partial x)_{x=0} \tag{4}$$

Sustituyendo las ecuaciones (*1*) y (*2*) en (*3*) y (*4*), respectivamente, obtenemos

$$A + B = C \tag{5}$$

$$(A - B)/a_1 = C/a_2 \tag{6}$$

Resolviendo las ecuaciones (*5*) y (*6*) simultáneamente, se tiene

$$\frac{B}{A} = \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \qquad \text{y} \qquad \frac{C}{A} = \frac{2a_1}{a_1 + a_2}$$

Tomando $a_1 = \sqrt{S/(\rho_L)_1}$ y $a_2 = \sqrt{S/(\rho_L)_2}$, en la anterior ecuación, se convierte en

$$\frac{B}{A} = \frac{\sqrt{(\rho_L)_1} - \sqrt{(\rho_L)_2}}{\sqrt{(\rho_L)_1} + \sqrt{(\rho_L)_2}} \tag{7}$$

$$\frac{C}{A} = \frac{2\sqrt{(\rho_L)_1}}{\sqrt{(\rho_L)_1} + \sqrt{(\rho_L)_2}} \tag{8}$$

Si $(\rho_L)_2$ es muy grande (en caso de extremo fijo, $(\rho_L)_2 = \infty$), la ecuación (*7*) da

$$B/A = -1$$

La onda reflejada B es igual a la onda incidente A, pero con signo contrario. Esto significa reflexión con inversión.

Si $(\rho_L)_1 = (\rho_L)_2$ (caso de una cuerda uniforme) de la ecuación (*8*) resulta,

$$C/A = 1$$

La onda trasmitida C es exactamente igual a la onda incidente A.

Si $(\rho_L)_2 > (\rho_L)_1$ (caso de una cuerda no uniforme), de la ecuación (*8*) resulta

$$C < A$$

La amplitud de la onda trasmitida C es menor que la amplitud de la onda incidente A.

Si $(\rho_L)_2$ es muy pequeña (en caso de extremo libre, $(\rho_L)_2 = 0$), de la ecuación (*7*) resulta

$$B = A$$

La onda reflejada es exactamente la misma que la onda incidente A.

La energía por unidad de longitud de la cuerda para cada una de las tres ondas diferentes está dada por

$$\text{energía incidente} = \tfrac{1}{2}(\rho_L)_1 A^2\omega^2$$

$$\text{energía reflejada} = \tfrac{1}{2}(\rho_L)_1 B^2\omega^2$$

$$\text{energía trasmitida} = \tfrac{1}{2}(\rho_L)_2 C^2\omega^2$$

Por el principio de la conservación de la energía, podemos decir que la energía que llega en la unidad de tiempo a la unión debe ser igual a la energía que sale de la unión en el mismo tiempo. Así:

$$\tfrac{1}{2}(\rho_L)_1 A^2\omega^2 a_1 = \tfrac{1}{2}(\rho_L)_1 B^2\omega^2 a_1 + \tfrac{1}{2}(\rho_L)_2 C^2\omega^2 a_2$$

o

$$Z_1A^2 = Z_1B^2 + Z_2C^2 \tag{9}$$

en donde $Z = (\rho_L)a$ se denomina *impedancia mecánica*.

De las ecuaciones (*6*) y (*9*), obtenemos

$$\frac{\text{energía reflejada}}{\text{energía incidente}} = \frac{(Z_1 - Z_2)^2}{(Z_1 + Z_2)^2}, \qquad \frac{\text{energía trasmitida}}{\text{energía incidente}} = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$$

A fin de obtener la máxima trasmisión de energía las dos impedancias deben ser iguales. En otras palabras, cuando $Z_1 = Z_2$, no hay energía reflejada, y la energía trasmitida es igual a la energía incidente.

VIBRACION LONGITUDINAL DE BARRAS

1.21. Deducir la ecuación diferencial del movimiento de barras uniformes que vibran longitudinalmente, y estudiar la solución general.

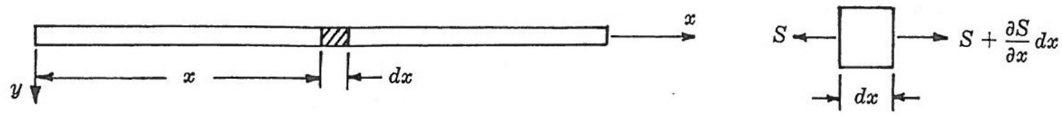


Fig. 1-25

Sea u el desplazamiento de una sección trasversal dx de la barra, como se muestra en la figura 1-25. Entonces, la deformación ϵ_x en cualquier punto x es

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Para una barra elástica, el esfuerzo es $\sigma_x = Y\epsilon_x$, en donde Y es el módulo de elasticidad. De esta forma, la fuerza de tensión en x es

$$S = \int_A \sigma_x \, dA = YA\frac{\partial u}{\partial x}$$

y la fuerza de inercia es $\rho A \, dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, en donde ρ es la densidad de la barra, y A es el área de la sección trasversal de la barra. Equilibrando las dos fuerzas, tenemos,

$$S + \frac{\partial S}{\partial x} dx = S + \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx \qquad \text{o} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

en donde $a = \sqrt{Y/\rho}$ es la velocidad de propagación de la onda.

Para la solución de esta ecuación diferencial parcial del movimiento de la vibración longitudinal de la barra, busquemos una solución de la forma $u(x,t) = X(x)T(t)$. Sustituyendo esta expresión en la ecuación *(1)* resulta

$$a^2 \frac{d^2X/dx^2}{X} = \frac{d^2T/dt^2}{T} \tag{2}$$

Puesto que el miembro izquierdo de la ecuación (2) es sólo una función de x, y el miembro derecho de la misma ecuación es sólo una función de t, cada miembro debe ser igual a una constante. Llamemos esta constante $-p^2$. Esto conducirá a dos ecuaciones diferenciales ordinarias.

$$d^2T/dt^2 + p^2T = 0 \qquad \text{y} \qquad d^2X/dx^2 + (p/a)^2X = 0$$

cuyas soluciones son:

$$T(t) = A\cos pt + B\,\mathrm{sen}\,pt, \qquad X(x) = C\cos(p/a)x + D\,\mathrm{sen}\,(p/a)x$$

en donde A, B, C y D son constantes arbitrarias.

Como $X(x)$ es una función de x únicamente y determina la forma del modo normal de la vibración en consideración, se le denomina *función normal*. De esta manera la solución general es

$$u(x,t) = \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} (A_i \cos p_i t + B_i\,\mathrm{sen}\,p_i t)\left(C_i \cos\frac{p_i}{a}x + D_i\,\mathrm{sen}\frac{p_i}{a}x\right) \tag{3}$$

en donde A_i y B_i son constantes arbitrarias que deben ser determinadas por las condiciones de frontera, C_i y D_i son constantes arbitrarias que deben ser determinadas por las condiciones iniciales, y p_i son las frecuencias naturales del sistema.

1.22. Determinar la vibración longitudinal libre de una barra uniforme, de longitud L, fija en ambos extremos.

Para la vibración longitudinal de la barra, la solución general está dada por la ecuación *(3)* del problema 1.21.

Los desplazamientos de esta barra en sus extremos son iguales a cero, esto es, las condiciones de frontera son $u(0, t) = u(L, t) = 0$. Sustituyendo estas condiciones de frontera en la solución general, tenemos

$$u(0,t) = (A_i \cos p_i t + B_i \operatorname{sen} p_i t)C_i = 0 \quad \text{o} \quad C_i = 0$$

$$u(L,t) = (A_i \cos p_i t + B_i \operatorname{sen} p_i t)D_i \operatorname{sen}(p_i L/a) = 0$$

o $\operatorname{sen}(p_i L/a) = 0$ y $p_i = i\pi a/L$, $i = 1, 2, \ldots$.

La vibración libre es

$$u(x,t) = \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} \operatorname{sen}\frac{i\pi x}{L}(A_i' \cos p_i t + B_i' \operatorname{sen} p_i t)$$

en donde A_i' y B_i' son constantes arbitrarias que deben ser determinadas por las condiciones iniciales, y p_i son las frecuencias naturales de vibración de la barra.

1.23. Determinar la vibración longitudinal libre de una barra uniforme, de longitud L libre en ambos extremos.

Para la vibración longitudinal libre de la barra, la solución general está dada por la ecuación (3) del problema 1.21.

Las fuerzas en los extremos de esta barra durante la vibración son iguales a cero, o sea, las condiciones de frontera son $\partial u/\partial x = 0$ en $x = 0$ y en $x = L$. Sustituyendo estas condiciones de frontera en la solución general, obtenemos

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{D_i p_i}{a}(A_i \cos p_i t + B_i \operatorname{sen} p_i t) = 0 \quad \text{o} \quad D_i = 0$$

$$\frac{\partial u(L,t)}{\partial x} = -\frac{p_i C_i}{a} \operatorname{sen}\frac{p_i L}{a}(A_i \cos p_i t + B_i \operatorname{sen} p_i t) = 0$$

o $\operatorname{sen}(p_i L/a) = 0$, y $p_i = i\pi a/L$, $i = 1, 2, \ldots$.

La vibración libre es

$$u(x,t) = \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} \cos\frac{i\pi x}{L}(A_i' \cos p_i t + B_i' \operatorname{sen} p_i t)$$

en donde A_i' y B_i' son constantes arbitrarias determinadas por las condiciones iniciales y p_i son las frecuencias naturales.

1.24. Obtener una expresión para la vibración longitudinal libre de una barra uniforme, de longitud L, con un extremo fijo y con el otro libre.

Para la vibración longitudinal libre de la barra, podemos utilizar la ecuación (3) del problema 1.21.

La fuerza de tensión en el extremo libre de esta barra es igual a cero, mientras que el desplazamiento en el extremo fijo de la barra también es igual a 0, o sea, las condiciones de frontera son $(u)_{x=0} = 0$, $(\partial u/\partial x)_{x=L} = 0$. Sustituyendo estas condiciones de frontera en la solución general, obtenemos

$$u(0,t) = C_i(A_i \cos p_i t + B_i \operatorname{sen} p_i t) = 0 \quad \text{o} \quad C_i = 0$$

$$\frac{\partial u(L,t)}{\partial x} = \frac{p_i D_i}{a} \cos\frac{p_i L}{a}(A_i \cos p_i t + B_i \operatorname{sen} p_i t) = 0$$

o $\cos(p_i L/a) = 0$, ya que D_i no puede ser igual a cero. De aquí $p_i = i\pi a/2L$ en donde $i = 1, 3, \ldots$

La vibración libre es

$$u(x,t) = \sum_{i=1,3,\ldots}^{\infty} \operatorname{sen}\frac{i\pi x}{2L}(A_i' \cos p_i t + B_i' \operatorname{sen} p_i t)$$

en donde A_i' y B_i' son constantes arbitrarias para ser determinadas por las condiciones iniciales, y p_i son las frecuencias naturales.

1.25. Una barra de longitud L está fija en un extremo y tiene una masa concentrada M adherida al otro extremo como se muestra en la figura 1.26. Derivar la ecuación de frecuencia para la vibración longitudinal libre de esta barra.

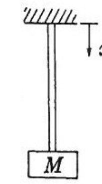


Fig. 1-26

Para la vibración longitudinal libre de las barras, la solución general está dada por la ecuación (3) del problema 1.21.

No existe desplazamiento en el extremo fijo de esta barra, y la fuerza dinámica en el extremo libre de esta barra es igual a la fuerza de inercia de la masa concentrada M, o sea, las condiciones de frontera son

$$(u)_{x=0} = 0, \qquad AY\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=L} = -M\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{x=L}$$

en donde A es la sección trasversal de la barra y Y es el módulo de elasticidad de Young.

De la primera de estas condiciones de frontera tenemos

$$u(0,t) = C_i(A_i \cos p_i t + B_i \operatorname{sen} p_i t) = 0 \quad \text{o} \quad C_i = 0$$

y de la segunda condición de frontera tenemos,

$$\frac{AYp_i}{a}\cos\frac{p_i L}{a} = Mp_i^2 \operatorname{sen}\frac{p_i L}{a} \quad \text{o} \quad \frac{p_i L}{a}\tan\frac{p_i L}{a} = \frac{A\rho L}{M} = M_{\text{barra}}/M$$

en donde $a = \sqrt{Y/\rho}$ siendo ρ la densidad de la barra.

Cuando $M_{\text{barra}}/M \to \infty$, o sea, cuando la masa M es pequeña comparada con la masa de la barra, la ecuación de frecuencia se convierte en $\cos(p_i L/a) = 0$. El sistema se convierte en el de una barra con un extremo fijo y el otro libre. (Ver problema 1.24.)

Cuando M es grande, comparada con la masa de la barra, se puede demostrar que $p_1 = \sqrt{AY/ML}$. Esto corresponde a la frecuencia natural de un sistema simple masa-resorte, de masa M y una constante de resorte AY/L.

VIBRACION DE MEMBRANAS

1.26. Deducir la ecuación diferencial del movimiento de la vibración trasversal de membranas uniformes e investigar su solución general.

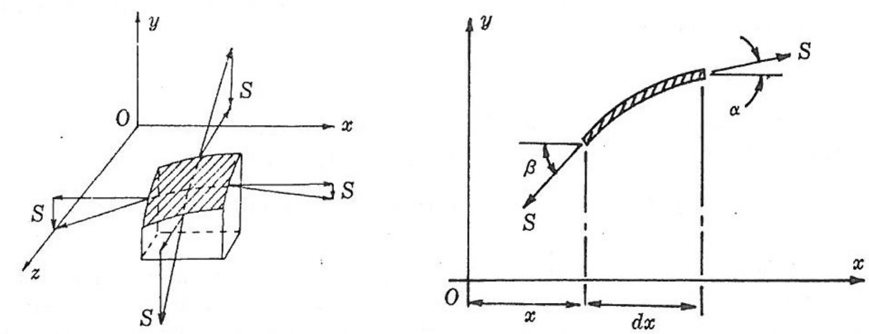


Fig. 1-27

Imaginemos una membrana de 2 dimensiones, con una superficie completamente flexible y un espesor uniforme extremadamente pequeño que no ofrece resistencia a la flexión o a la cizalladura. Se supone que la tensión permanece constante en magnitud y uniforme en todas partes y en todas direcciones, y la misma no se afecta por las pequeñas deflexiones perpendiculares a la membrana. En su posición de reposo o equilibrio se supone que la membrana es una superficie plana, por ejemplo en el plano xz.

Consideremos el elemento diferencial $dx\,dz$ de una membrana, como se muestra en la figura 1.27. Las fuerzas actuantes son las que resultan de la tensión uniforme S por unidad de longitud de la arista del elemento debida a la deflexión de la membrana del plano en equilibrio xz.

Como en el caso de la cuerda flexible, la fuerza total de recuperación es igual al producto de la masa por la aceleración, o sea, $\sum F = m\ddot{y}$.

La fuerza de recuperación, como se muestra en la figura 1.27 es $(-S \operatorname{sen}\beta + S \operatorname{sen}\alpha)\,dz$. Para desplazamientos pequeños, las inclinaciones son pequeñas, $\operatorname{sen}\beta \doteq \tan\beta = \left[\dfrac{\partial y}{\partial x}\right]_{x=x}$ y $\operatorname{sen}\alpha \doteq \tan\alpha = \left[\dfrac{\partial y}{\partial x}\right]_{x=x+dx}$ y la fuerza de restitución es

$$S\,dz\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx\right) - \frac{\partial y}{\partial x}\right] = S\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx\,dz$$

En forma similar, la fuerza de restitución a lo largo de las aristas dx es $S\dfrac{\partial^2 y}{\partial z^2}dx\,dz$ y la ecuación diferencial del movimiento está dada por

$$S\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\right)dx\,dz = \rho_a\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}dx\,dz \qquad (1)$$

en donde ρ_a es la masa por unidad de área de la membrana. La ecuación de onda bidimensional es, por lo tanto

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad (2)$$

en donde $a = \sqrt{S/\rho_a}$ es la velocidad de propagación de onda.

La solución de esta ecuación de onda bidimensional puede obtenerse por el método de la "separación de variables". Como quiera que y es una función de x, z y t, se puede representar como

$$y(x,z,t) = X(x)\,Z(z)\,T(t) \qquad (3)$$

Entonces $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = ZT\frac{d^2X}{dx^2}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = XT\frac{d^2Z}{dz^2}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = XZ\frac{d^2T}{dt^2} \qquad (4)$$

Sustituyendo (4) en (3) nos da

$$a^2 ZT\frac{d^2X}{dx^2} + a^2 XT\frac{d^2Z}{dz^2} = XZ\frac{d^2T}{dt^2} \qquad (5)$$

Dividiendo (5) por XZT, $$\frac{a^2}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{a^2}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = \frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2} \qquad (6)$$

Debido a que X, Z, T, son independientes una de otra, y como el lado derecho de la ecuación (6) sólo contiene t, ambos lados de (6) deben ser iguales a cierta constante. Sea esta constante $-p^2$. Entonces esto nos conduce a las dos ecuaciones diferenciales siguientes:

$$\frac{d^2T}{dt^2} + p^2T = 0 \quad \text{con solución} \quad T(t) = E\operatorname{sen}pt + F\cos pt \qquad (7)$$

$$\frac{a^2}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{a^2}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = -p^2 \quad \text{o} \quad \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{p^2}{a^2} = -\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} \qquad (8)$$

Ahora cada lado de la ecuación (8) sólo contiene una variable, y de esta manera ambos lados deben ser iguales a alguna constante. Sea esta constante k^2. Esto conduce a las dos ecuaciones diferenciales ordinarias siguientes en x y en z,

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \left(\frac{p^2}{a^2} - k^2\right)X = 0, \quad \frac{d^2Z}{dz^2} + k^2Z = 0 \qquad (9)$$

con soluciones

$$X(x) = A\operatorname{sen}\sqrt{(p^2/a^2) - k^2}\,x + B\cos\sqrt{(p^2/a^2) - k^2}\,x \qquad (10)$$

$$Z(z) = C\operatorname{sen}kz + D\cos kz \qquad (11)$$

Entonces una solución de la ecuación de onda bidimensional está dada por

$$y(x,z,t) = (A\operatorname{sen}\sqrt{(p^2/a^2) - k^2}\,x + B\cos\sqrt{(p^2/a^2) - k^2}\,x)(C\operatorname{sen}kz + D\cos kz)(E\operatorname{sen}pt + F\cos pt)$$

La solución general es la suma de un número arbitrario de tales soluciones, o sea:

$$y(x,z,t) = \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty}(A_i\operatorname{sen}\sqrt{(p_i^2/a^2) - k_i^2}\,x + B_i\cos\sqrt{(p_i^2/a^2) - k_i^2}\,x)(C_i\operatorname{sen}k_iz + D_i\cos k_iz)(E_i\operatorname{sen}p_it + F_i\cos p_it) \qquad (12)$$

en donde A_i, B_i, C_i, D_i son constantes arbitrarias para determinar por las condiciones de frontera, E_i y F_i son constantes arbitrarias para ser determinadas por las condiciones iniciales; y p_i son las frecuencias naturales.

1.27. Una membrana rectangular uniforme está rígidamente sujeta en todos sus extremos, como se muestra en la figura 1-28. Determinar la ecuación general para la vibración trasversal libre de la membrana.

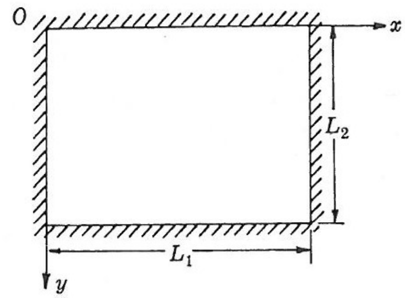


Fig. 1-28

La ecuación de onda bidimensional de la vibración trasversal libre de una membrana uniforme es

$$\frac{S}{\rho_a}\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\right] = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

con una solución general dada por

$$y(x,z,t) = (A \operatorname{sen}\sqrt{(p^2/a^2)-k^2}\,x + B\cos\sqrt{(p^2/a^2)-k^2}\,x)(C\operatorname{sen}kz + D\cos kz)(E\operatorname{sen}pt + F\cos pt)$$

en donde $a = \sqrt{S/\rho_a}$ es la velocidad de propagación de la onda.

Las cuatro condiciones de frontera son

(1) $y(0,z,t) = 0$, (2) $y(L_1,z,t) = 0$, (3) $y(x,0,t) = 0$, (4) $y(x,L_2,t) = 0$

o sea, no hay desplazamiento en los lados.

De la condición de frontera (*1*) se obtiene

$$y(0,z,t) = B(C\operatorname{sen}kz + D\cos kz)(E\operatorname{sen}pt + F\cos pt) = 0 \quad \text{o} \quad B = 0$$

De la condición de frontera (*2*) se obtiene

$$y(L_1,z,t) = A\operatorname{sen}\sqrt{(p^2/a^2)-k^2}\,L_1(C\operatorname{sen}kz + D\cos kz)(E\operatorname{sen}pt + F\cos pt) = 0$$

o $\operatorname{sen}\sqrt{(p^2/a^2)-k^2}\,L_1 = 0$, o sea $\sqrt{(p^2/a^2)-k^2} = m\pi/L_1 = \gamma$, $m = 0,1,2,\ldots$.

De la condición de frontera (*3*) se obtiene

$$y(x,0,t) = A\operatorname{sen}\gamma x(E\operatorname{sen}pt + F\cos pt)D = 0 \quad \text{o} \quad D = 0$$

De la condición de frontera (*4*),

$$y(x,L_2,t) = A\operatorname{sen}\gamma x(C\operatorname{sen}kL_2)(E\operatorname{sen}pt + F\cos pt) = 0 \quad \text{o} \quad \operatorname{sen}kL_2 = 0$$

o sea $k = n\pi/L_2$, $n = 0,1,2,\ldots$. Así $p^2 = a^2(m^2\pi^2/L_1^2 + k^2)$ o $p_{mn} = (a\pi/L_1L_2)\sqrt{L_1^2n^2 + L_2^2m^2}$, $m = 1,2,\ldots$, $n = 1,2,\ldots$, y la solución de la ecuación general se convierte en

$$y(x,z,t) = A\operatorname{sen}\gamma x(C\operatorname{sen}kz)(E\operatorname{sen}pt + F\cos pt)$$

Combinando las constantes en $ACE = M$ y $ACF = N$. Como quiera que existen múltiples soluciones posibles, la solución más general será la superposición de todas las soluciones posibles

$$y(x,z,t) = \sum_{m=1,2,\ldots}^{\infty}\ \sum_{n=1,2,\ldots}^{\infty} \operatorname{sen}\gamma_m x\ \operatorname{sen}k_n z(M_{mn}\operatorname{sen}p_{mn}t + N_{mn}\cos p_{mn}t)$$

en donde $M_{mn} = A_mC_nE_{mn}$, $N_{mn} = A_mC_nF_{mn}$, y γ_m, k_n y p_{mn} ya están definidas anteriormente.

La figura 1-29 muestra más adelante los modos de vibración de una membrana rectangular fija en todos los extremos. Las áreas sombreadas y las no sombreadas están en fase opuesta.

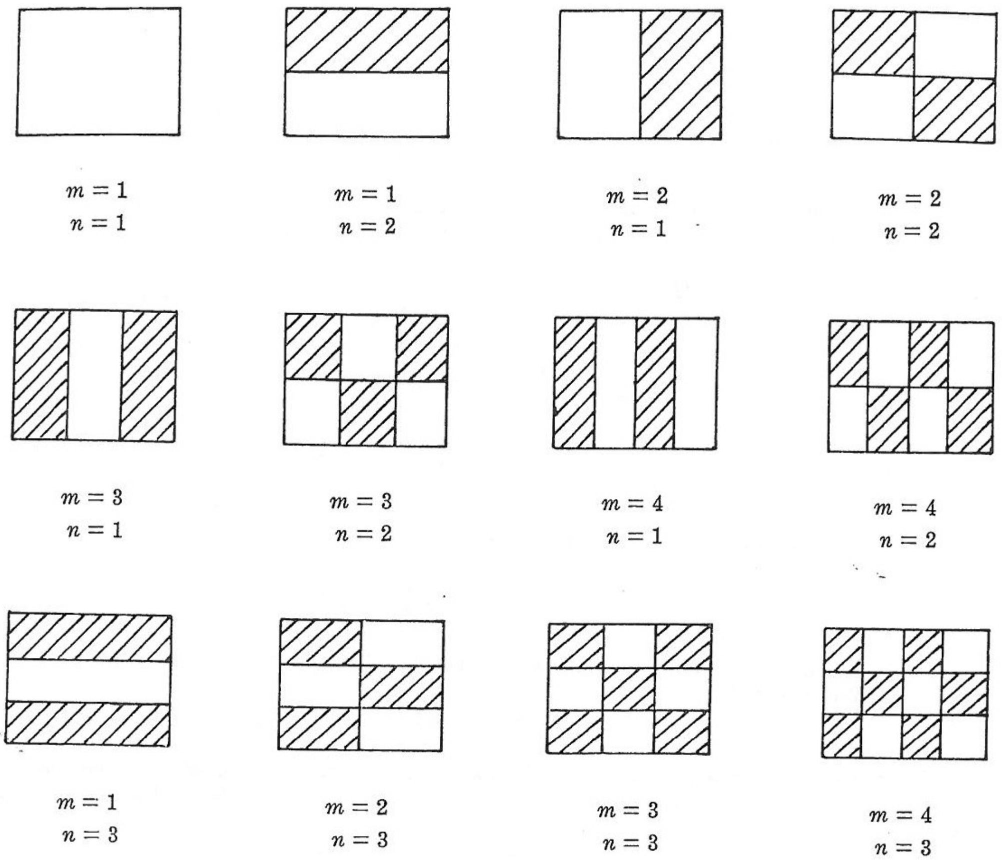


Fig. 1-29. Modos de vibración de una membrana rectangular fija en sus extremos

1.28. Una membrana circular uniforme de radio d_0 está rígidamente fija en su circunferencia, como se muestra en la figura 1-30. Determinar la solución general para la vibración trasversal libre de la membrana.

La ecuación bidimensional de la onda en coordenadas cartesianas de la vibración trasversal libre de una membrana uniforme es

$$a^2\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad (1)$$

en donde $a = \sqrt{S/\rho_a}$ es la velocidad de propagación de onda, S es la tensión, y ρ_a es la densidad por unidad de área de la membrana. Para la frontera circular, la ecuación (1) se puede trasformar en coordenadas polares

$$\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad (2)$$

utilizando las ecuaciones de trasformación

$$x = r\cos\theta, \qquad z = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

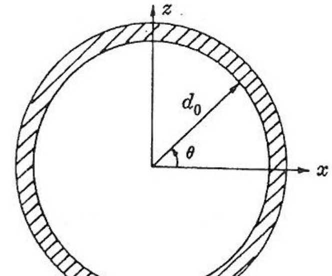


Fig. 1-30

Debido a la simetría de la membrana circular con respecto a su centro geométrico $\partial y/\partial\theta = 0$, y entonces la ecuación (2) se convierte en

$$\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad (3)$$

Puesto que y es una función de r y t, el método de "separación de variables" conduce a la solución de la siguiente forma

$$y(r,t) = R(r)\,T(t)$$

y la ecuación (3) se convierte en $$\frac{a^2}{R}\left(\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}\right) = \frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2} \tag{4}$$

Como quiera que cada lado de (4) sólo contiene una variable independiente, ambos lados deben ser iguales a la misma constante. Llamemos esta constante $-p_2$. Entonces tenemos

$$\frac{d^2T}{dt^2} + p^2T = 0 \quad \text{con solución} \quad T(t) = C \operatorname{sen} pt + D\cos pt \tag{5}$$

y $$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \beta^2 R = 0 \text{ en donde } \beta^2 = p^2/a^2$$

o $$r^2\frac{d^2R}{dr^2} + r\frac{dR}{dr} + r^2\beta^2 R = 0 \tag{6}$$

Utilizando la trasformación $\gamma = r\beta$, se puede escribir la ecuación (6) como

$$\gamma^2\frac{d^2R}{d\gamma^2} + \gamma\frac{dR}{d\gamma} + \gamma^2 R = 0 \tag{7}$$

la que se conoce con el nombre de la ecuación diferencial de Bessel de orden cero. Entonces la solución está dada por

$$R(\gamma) = AJ_0(r\beta) + BK_0(r\beta) \tag{8}$$

en donde A y B son constantes arbitrarias, J_0 es la función de Bessel de la primera clase y de orden cero, y K_0 es la función de Bessel de la segunda clase y de orden 0. Entonces, el resultado de (3) se convierte en

$$y(r,t) = [AJ_0(r\beta) + BK_0(r\beta)](C\operatorname{sen} pt + D\cos pt) \tag{9}$$

en donde $$J_0(\gamma) = \sum_{k=0,1,2,\ldots}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(K!)^2}(r/2)^{2k}$$

$$K_0(\gamma) = J_0(\gamma)\ln\gamma - \sum_{k=0,1,2,\ldots}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(K!)^2}\left(\frac{r}{2}\right)^{2k} f(k)$$

$$f(k) = \sum_{n=1,2,\ldots}^{\infty} (1/n)$$

La condición de frontera implica que el desplazamiento en el centro de la membrana debe ser finito, o sea, $y(0,t) \neq 0$. Ahora $K_0(0) = \ln 0 = -\infty$, de tal forma B debe ser igual a cero. Entonces

$$y(r,t) = (E\operatorname{sen} pt + F\cos pt)J_0(r\beta) \tag{10}$$

en donde las nuevas constantes $E = AC$ y $F = AD$.

La otra condición de frontera es $y(d_0,t) = 0$ o $J_0(d_0\beta)(E\operatorname{sen} pt + F\cos pt) = 0$ de la cual $J_0(d_0\beta) = 0$, luego $d_0\beta_1 = 2{,}4$, $d_0\beta_2 = 5{,}5$, $d_0\beta_3 = 8{,}7, \ldots$, y ya que $\beta^2 = p^2/a^2$, $p_i = (a/\sqrt{d_0})\sqrt{d_0\beta_i}$, $i = 1, 2, \ldots$.

La solución completa de la vibración trasversal libre de una membrana circular fija en sus extremos está dada entonces por,

$$y(r,t) = \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} J_0(r\beta_i)(E_i\operatorname{sen} p_i t + F_i\cos p_i t) \tag{11}$$

en donde p_i son las frecuencias naturales y J_0 es la función de Bessel de la primera clase y de orden cero. E_i y F_i son constantes arbitrarias para determinar por las condiciones iniciales.

La figura 1-31, más adelante, muestra los modos de vibración de una membrana circular uniforme rígidamente extendida. Las áreas sombreadas están en fase opuesta a las no sombreadas.

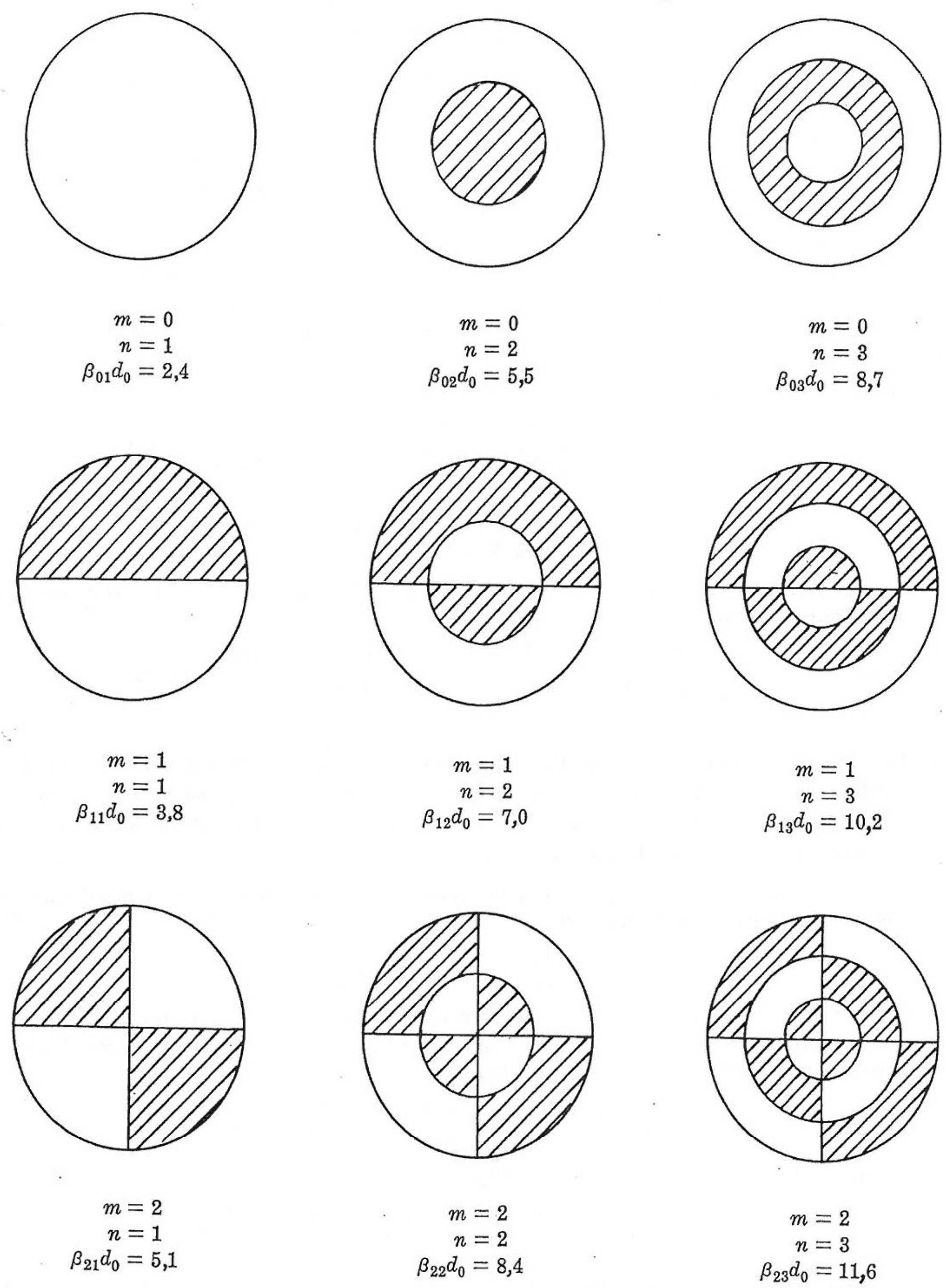


Fig. 1-31. Modos de vibración de una membrana circular rígidamente extendida

1.29. La amplitud de desplazamiento de una membrana circular uniforme de un micrófono está dada por $y = (P_0/k^2S)[J_0(kr)/J_0(kr_0) - 1]$. Encontrar el desplazamiento promedio correspondiente y_{prom} de la superficie de la membrana.

Entonces el desplazamiento promedio está dado por

$$y_{\text{prom}} = \frac{1}{\pi r_0^2} \int_{S'} y(r)\, dS' \tag{1}$$

en donde $S' = \pi r_0^2$ es el área de la superficie de la membrana. Entonces

$$y_{\text{prom}} = \frac{1}{\pi r_0^2}\int_0^{r_0} (P_0/k^2S)\left[\frac{J_0(kr)}{J_0(kr_0)} - 1\right] 2\pi r\, dr \tag{2}$$

en donde P_0 = amplitud de la fuerza aplicada, S = tensión de la membrana, r_0 = radio de la membrana, y J_0 = función de Bessel de la primera clase y de orden 0.

Podemos volver a escribir la ecuación (2) como

$$y_{\text{prom}} = \frac{2P_0}{r_0^2k^2SJ_0(kr_0)}\int_0^{r_0} J_0(kr)r\, dr - \frac{2P_0}{r_0^2k^2S}\int_0^{r_0} r\, dr \tag{3}$$

Ahora $\int xJ_0(x)\,dx = xJ_1(x)$ o $\int (kr)J_0(kr)k\,dr = (kr)J_1(kr)$. Entonces la ecuación (3) se convierte en

$$y_{\text{prom}} = \frac{2P_0}{r_0^2k^4SJ_0(kr_0)}\int_0^{r_0} (kr)J_0(kr)k\, dr - \frac{2P_0}{r_0^2k^2S}\int_0^{r_0} r\, dr \tag{4}$$

Haciendo la integración indicada, obtenemos,

$$y_{\text{prom}} = \frac{2P_0}{r_0^2k^4SJ_0(kr_0)}\Big[(kr)J_1(kr)\Big]_0^{r_0} - \frac{2P_0}{r_0^2k^2S}\Big[(r^2/2)\Big]_0^{r_0}$$

o

$$y_{\text{prom}} = \frac{2P_0}{r_0^2k^4SJ_0(kr_0)}(kr_0)J_1(kr_0) - P_0/k^2S \tag{5}$$

En una tabla de funciones de Bessel, $J_2(kr_0) = 2J_1(kr_0)/kr_0 - J_0(kr_0)$; entonces la ecuación (5) se puede escribir así,

$$y_{\text{prom}} = \frac{2P_0kr_0J_1(kr_0) - P_0r_0^2k^2J_0(kr_0)}{r_0^2k^4SJ_0(kr_0)} = \frac{P_0}{k^2SJ_0(kr_0)}\left[\frac{2J_1(kr_0)}{kr_0} - J_0(kr_0)\right] = \frac{P_0}{k^2S}\frac{J_2(kr_0)}{J_0(kr_0)}$$

1.30. Se tiene una membrana circular uniforme, de radio r_0, extendida a partir de su circunferencia fija. Una fuerza sinusoidal impulsora $F_0 \operatorname{sen} \omega t$ actúa uniformemente sobre un lado de la membrana. Si el coeficiente de la fuerza de amortiguamiento es c, determine la vibración resultante.

La ecuación diferencial general de la vibración trasversal libre de una membrana circular en coordenadas polares está dada por

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial y}{\partial r}\right)$$

en donde $a = \sqrt{S/\rho_a}$ y r = distancia radial desde el centro de la membrana.

En presencia de la fuerza de amortiguamiento $c(\partial y/\partial t)$ y de la fuerza impulsora $F_0 \operatorname{sen} \omega t$, la ecuación de movimiento se convierte en,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{S}{\rho_a}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial y}{\partial r}\right) - \frac{c}{\rho_a}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{F_0}{\rho_a}\operatorname{sen}\omega t \tag{1}$$

Utilizando la notación exponencial compleja

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{S}{\rho_a}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial y}{\partial r}\right) - \frac{c}{\rho_a}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{F_0}{\rho_a}e^{i\omega t} \tag{2}$$

Supongamos que existe una solución estable $y = Ye^{i\omega t}$ y sustituyamos esta ecuación en (2):

$$\frac{S}{\rho_a}\left(\frac{d^2Y}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dY}{dr}\right) + \left(\omega^2 - \frac{ic\omega}{\rho_a}\right)Y = -F_0/\rho_a \tag{3}$$

la cual se puede escribir en la forma

$$\frac{d^2Y}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dY}{dr} + k^2Y = -F_0/S \tag{4}$$

en donde $k^2 = (\rho_a\omega^2 - ic\omega)/S$.

La solución completa de la ecuación (4) es la suma de la solución particular y de la complementaria. La solución complementaria se obtiene al resolver:

$$\frac{d^2Y}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dY}{dr} + k^2Y = 0 \tag{5}$$

cuya solución es

$$Y(r) = AJ_0(kr) + BK_0(kr) \tag{6}$$

en donde A y B son constantes arbitrarias, J_0 es la función de Bessel de la primera clase y de orden 0, y K_0 es la función de Bessel de la segunda clase y de orden 0. Para una membrana circular en tensión $B = 0$. (Véase problema 1.28.)

La solución particular es $Y(r) = -F_0/k^2S$. De esta forma la solución completa es

$$Y(r) = AJ_0(kr) - F_0/k^2S \tag{7}$$

Ahora bien, la deflexión en la frontera es cero, o sea, $Y = 0$ en $r = r_0$; entonces, a partir de la ecuación (7), $Y(r_0) = AJ_0(kr_0) - F_0/k^2S = 0$ o $A = F_0/k^2SJ_0(kr_0)$. Entonces (7) se convierte en

$$Y(r) = \frac{F_0J_0(kr)}{k^2SJ_0(kr_0)} - \frac{F_0}{k^2S}e^{i\omega t} \tag{8}$$

y la vibración del estado estable de la membrana está dada por la parte imaginaria de la ecuación (8),

$$y(r,t) = \frac{F_0}{k^2S}\left[\frac{J_0(kr)}{J_0(kr_0)} - 1\right]\operatorname{sen}\omega t$$

1.31. El diafragma de un micrófono de condensador está hecho de una hoja circular de aluminio. Si su radio es 0,01 m, y su espesor 0,00001 m, averiguar la máxima tensión permitida en nt/m hasta la cual puede fusionarse este diafragma. ¿Cuál es la frecuencia fundamental cuando se alcanza esta máxima tensión? Determinar la amplitud de desplazamiento en el centro del diafragma cuando es movido por una onda sonora de frecuencia de 100 ciclos/seg, y una amplitud de presión de 2,0 nt/m^2. ¿Cuál es el desplazamiento promedio?

La tensión máxima permitida $S_{\text{máx}}$, es igual al área multiplicada por la tensión permitida, o sea, $S_{\text{máx}} = \sigma A$. Si el esfuerzo permitido es $\sigma = 10^8$ nt/m^2, entonces $S_{\text{máx}} = 10^8(0{,}00001) = 1000$ nt/m.

La frecuencia fundamental de una membrana circular uniforme es

$$f_1 = \frac{2{,}4}{2\pi R}\sqrt{S/\rho_a} = 7350 \text{ ciclos/seg}$$

en donde $R = 0{,}01$ m es el radio, $S = S_{\text{máx}} = 1000$ nt/m es la tensión,

$$\rho_a = 2700(10)^{-5} = 0{,}027 \text{ kg/m}^2$$

es la masa por unidad de área de la membrana, y $\rho = 2700$ kg/m^3 es la densidad del aluminio.

La amplitud de desplazamiento en el centro del diafragma es

$$y(0,t) = \frac{P_0}{S}\left[\frac{J_0(0) - J_0(kR)}{k^2J_0(kR)}\right]$$

en donde $k = \omega/a = \omega/\sqrt{S/\rho_a} = 100(2\pi)/\sqrt{1000/0{,}027} = 3{,}26$ o $k^2 = 10{,}06$ $J_0(0) = 1$, $J_0(kR) = J_0[(3{,}26)(0{,}01)] = J_0(0{,}0326) = 0{,}9997$ son las funciones de Bessel de la primera clase y de orden 0. Por tanto,

$$y(0,t) = \frac{2}{1000}\left[\frac{1 - 0{,}9997}{10{,}06(0{,}9997)}\right] = 6(10)^{-8}\text{ m}$$

La amplitud de desplazamiento promedio está dada por

$$y_{\text{prom}} = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R (P_0/k^2S)\frac{J_0(kr) - J_0(kR)}{J_0(kR)}2\pi r\,dr = \frac{P_0}{k^2S}\left[\frac{J_2(kR)}{J_0(kR)}\right]$$

en donde $J_2(kR) = J_2(0{,}0326) = 0{,}00015$ es la función de Bessel de la primera clase y de orden dos y $S = S_{\text{máx}} = 1000$ nt/m. De esta forma,

$$y_{\text{prom}} = \frac{2(0{,}00015)}{10{,}06(1000)} = 3(10)^{-8}\text{ m}$$

VIBRACION DE PLACAS CIRCULARES

1.32. Una placa circular delgada y uniforme de radio R y espesor t_0 está rígidamente sujeta en toda su circunferencia. Averiguar la vibración trasversal libre de la placa.

La ecuación diferencial de la vibración trasversal libre de una placa circular delgada y uniforme está dada por

$$\left[\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial y}{\partial r}\right]^2 + \frac{12\rho(1-\mu^2)}{Yt_0^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad \text{o} \quad \nabla_r^4 y + \frac{12(1-\mu^2)}{Yt_0^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \tag{1}$$

en donde ρ = densidad de la placa, μ = relación de Poisson, Y = módulo de Young, t_0 = espesor de la placa.

Supongamos un movimiento periódico de la siguiente forma:

$$y = \bar{Y}e^{i\omega t} \tag{2}$$

en donde $\bar{Y}$ es una función compleja únicamente de r. Entonces la ecuación (1) se reduce a

$$\nabla_r^4 \bar{Y} = \frac{12\omega^2\rho(1-\mu^2)}{Yt_0^2}\bar{Y} \quad \text{o} \quad (\nabla_r^4 - k^4)\bar{Y} = 0 \tag{3}$$

en donde $k^4 = 12\omega^2\rho(1-\mu^2)/Yt_0^2$. Ya que $\nabla_r^4 - k^4 = (\nabla_r^2 + k^2)(\nabla_r^2 - k^2)$, la solución de (3) consiste en la suma de las soluciones de $\nabla_r^2 + k^2 = 0$, dada por $\bar{Y} = AJ_0(kr)$, y la solución de $\nabla_r^2 - k^2 = 0$, dada por $\bar{Y} = BJ_0(ikr) = BI_0(kr)$ en donde I_0 es la función hiperbólica de Bessel. De esta forma,

$$\bar{Y}(r) = AJ_0(kr) + BI_0(kr) \tag{4}$$

Para una placa rígidamente sujeta en los bordes, las condiciones de frontera son $\bar{Y}(R) = 0$ y $\partial\bar{Y}(R)/\partial r = 0$. Sustituyendo éstas en la ecuación (4) y sus derivadas, tenemos,

$$AJ_0(kR) + BI_0(kR) = 0 \tag{5}$$

$$-AkJ_1(kR) + BkI_1(kR) = 0 \tag{6}$$

Dividamos la ecuación (5) por (6) para obtener

$$\frac{J_0(kR)}{J_1(kR)} = -\frac{I_0(kR)}{I_1(kR)} \tag{7}$$

en donde $kR = n\pi$, $n = 1, 2, \ldots$. entonces

$$\omega^2 = \frac{Yt_0^2k^4}{12\rho(1-\mu^2)} = \frac{Yt_0^2(n\pi/R)^4}{12\rho(1-\mu^2)} \tag{8}$$

y la vibración trasversal libre de la placa es

$$y(r,t) = [AJ_0(kr) + BI_0(kr)]e^{i\omega t}$$

1.33. El diafragma del auricular de un teléfono es una placa de acero circular con radio 0,015 m, y espesor uniforme de 0,0001 m. Si el diafragma está rígidamente sujeto en sus bordes, encontrar la frecuencia fundamental de la vibración trasversal.

Del problema 1.32, tomamos que la frecuencia fundamental de una placa circular delgada rígidamente sujeta a sus extremos es

$$f_1 = \frac{0{,}47\,t_0}{R^2}\sqrt{\frac{Y}{\rho(1-\mu^2)}} = 1100 \text{ ciclos/seg}$$

en donde t_0 = 0,0001 m es el espesor de la placa, R = 0,015 m es el radio de la placa, Y = $19{,}5(10)^{10}\ \text{nt/m}^2$ es el módulo de Young para el acero, $\rho = 7700\ \text{kg/m}^3$ es la densidad del acero, y μ = 0,28 es la relación de Poisson.

Problemas propuestos

ONDAS

1.34. Demuestre que $A \cos \omega t + A \cos(\omega t + 120°) + A \cos(\omega t + 240°) = 0$.

1.35. Dados dos movimientos armónicos $x_1 = 10 \cos \omega t$ y $x_2 = \cos(\omega t + 60°)$, encontrar X y ϕ en $X \cos(\omega t + \phi) = x_1 + x_2$. *Respuesta:* X = 10,6, ϕ = 39,5°

1.36. Dados dos movimientos armónicos $x_1 = 20 \text{ sen } 22t$ y $x_2 = 30 \text{ sen } 23t$, hallar la frecuencia y el periodo de pulsación. *Respuesta:* f_b = 0,16 ciclos/seg, P_b = 6,28 seg

1.37. Si P_1 y P_2 son los periodos de dos ondas armónicas x_1 y x_2 respectivamente, y $mP_1 = nP_2$, encontrar el periodo de $x_1 + x_2$. *Respuesta:* $P = mP_1 = nP_2$

1.38. Dados $u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$ y $u(0, t) = u(L, t) = 0$. Si las ondas están comprendidas entre $x = 0$ y $x = L$, ¿Cuál es el periodo de las funciones f y g? *Respuesta:* $P = 2L/c$.

VIBRACIONES

1.39. Una viga apoyada simplemente de longitud L es movida por una masa M_0 en su centro. Si la masa de la viga es insignificante comparada con M_0, encontrar la frecuencia natural de vibración de la viga. *Respuesta:* $\omega_n = \sqrt{48YI/M_0L^3}$ rad/seg

1.40. Una placa cuadrada homogénea de lado L y masa M_0 está suspendida en el punto medio de uno de sus lados. Encuentre la frecuencia de vibración. *Respuesta:* $\omega_n = \sqrt{6g/5L}$ rad/seg

1.41. Un tubo de forma U, es de calibre uniforme y el área de la sección trasversal es A. Si se agita una columna de líquido de longitud L y densidad ρ, encontrar la frecuencia de la resultante del movimiento de la columna líquida. *Respuesta:* $\omega_n = \sqrt{2g/L\rho}$ rad/seg

1.42. Un circuito eléctrico contiene un condensador C, una inductancia L, y un interruptor en serie. El condensador tiene inicialmente una carga q_0, y el interruptor está abierto durante $t < 0$. Si se cierra el interruptor en el instante $t = 0$, encontrar la carga ulterior del condensador.
Respuesta: $q(t) = q_0 \cos \sqrt{1/LC}\, t$

1.43. Si un sistema simple masa-resorte está sujeto a una excitación impulsiva F_i, encontrar la respuesta del sistema. *Respuesta:* $x(t) = (F_i/\sqrt{km}) \operatorname{sen} \sqrt{k/m}\, t$

VIBRACION DE CUERDAS

1.44. Obtener una expresión para la energía potencial de una cuerda vibrante uniforme con longitud L, teniendo en cuenta de que la tensión S no es constante. *Respuesta:* $EP = \frac{1}{2}\int_0^L S(\partial y/\partial x)^2\, dx$

1.45. Una cuerda uniforme, de longitud L, está fija en ambos extremos, y existe una fuerza de amortiguamiento proporcional a la velocidad de la cuerda, que actúa sobre todos los puntos de la cuerda. Encontrar la vibración libre de la cuerda.
Respuesta:

$$y(x, t) = \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} \operatorname{sen}\frac{i\pi x}{L}(e^{-ct/2\rho})(A_i \operatorname{sen} p_i t + B_i \cos p_i t) \quad \text{en donde} \quad p_i = \sqrt{i^2\pi^2a^2/L^2 - c^2/4\rho^2}$$

1.46. Una cuerda uniforme tensa, de longitud L, está fija en ambos extremos y es excitada por una fuerza sinusoidal uniformemente distribuida $F_0 \cos \omega t$. Determinar el estado de vibración uniforme de la cuerda.

$$\textit{Respuesta:}\quad y(x, t) = (F_0/\rho\omega^2)\left(\cos\frac{\omega}{a}x + \tan\frac{\omega L}{2a}\operatorname{sen}\frac{\omega}{a}x - 1\right)\cos \omega t$$

1.47. Hallar el movimiento, en función de ondas viajeras de una cuerda uniforme de longitud L y fija en ambos extremos. La cuerda es desplazada una distancia h hacia su centro y dejada libre sin velocidad inicial.
Respuesta:

$$y(x, t) = \frac{4h}{\pi^2}\left[\operatorname{sen}\frac{\pi a}{L}\left(\frac{x}{a} - t\right) + \operatorname{sen}\frac{\pi a}{L}\left(\frac{x}{a} + t\right) - \frac{1}{9}\operatorname{sen}\frac{3\pi a}{L}\left(\frac{x}{a} - t\right) - \frac{1}{9}\operatorname{sen}\frac{3\pi a}{L}\left(\frac{x}{a} + t\right) + \cdots\right]$$

1.48. Una cuerda uniforme fija en ambos extremos es golpeada en el centro con el fin de obtener una velocidad inicial, la cual varía linealmente desde cero en los extremos hasta v_0 en el centro. Halle la vibración libre resultante.

$$\textit{Respuesta:}\quad y(x, t) = \frac{8v_0L}{a\pi^3}\sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty}\frac{1}{i^3}\operatorname{sen}\frac{i\pi}{2}\operatorname{sen}\frac{i\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{i\pi a}{L}t$$

VIBRACION LONGITUDINAL DE BARRAS

1.49. Mostrar que la ecuación diferencial del movimiento de la vibración longitudinal libre de una barra con una sección trasversal variable A está dada por $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{1}{A}\dfrac{\partial A}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\rho}{Y}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

1.50. Una barra uniforme, de longitud L, se mueve en un plano horizontal con velocidad v_0. Si la barra golpea una pared sólida con uno de sus extremos y se detiene, ¿cuál será la vibración longitudinal libre de la barra?

Respuesta: $u(x,t) = \dfrac{8v_0L}{\pi^2 a} \displaystyle\sum_{i=1,3,\ldots}^{\infty} \dfrac{1}{i^2} \operatorname{sen} \dfrac{i\pi x}{2L} \operatorname{sen} \dfrac{i\pi a}{2L} t$

1.51. Una barra uniforme, de longitud L, está fija en uno de sus extremos y el extremo libre se ha tensionado uniformemente hasta L_0, dejándose libre luego en $t = 0$. Halle la vibración longitudinal libre resultante de la barra.

Respuesta: $u(x,t) = \dfrac{8(L_0 - L)}{\pi^2} \displaystyle\sum_{i=1,3,\ldots}^{\infty} (-1)^{(i-1)/2} \dfrac{1}{i^2} \operatorname{sen} \dfrac{i\pi x}{2L} \cos \dfrac{i\pi a}{2L} t$

1.52. ¿Cuál es el efecto de una fuerza longitudinal constante sobre la frecuencia natural de una barra uniforme sometida a una vibración longitudinal? *Respuesta:* Ningún efecto

1.53. Una barra uniforme, de longitud L, está libre en uno de sus extremos, y es forzada a seguir un movimiento sinusoidal A sen ωt en el otro extremo. Halle la vibración del estado estable de la barra.

Respuesta: $u(x,t) = A\left(\cos \dfrac{\omega}{a} x + \tan \dfrac{\omega L}{a} \operatorname{sen} \dfrac{\omega}{a} x\right) \operatorname{sen} \omega t$

VIBRACION DE MEMBRANAS

1.54. Una membrana rectangular, de lados L y $2L$, está sujeta en sus bordes. ¿Cuáles son los menores modos degenerados de vibración trasversal de la membrana? *Respuesta:* (2,2) y (4,1)

1.55. Demostrar que la frecuencia fundamental de la vibración trasversal libre de una membrana en forma de triángulo equilátero firmemente tensionada en todos sus extremos es $f_1 = 4{,}77\sqrt{S/A\,\rho_a}$ en donde A es el área de la membrana.

1.56. Una membrana circular, con radio 10 cm y densidad 1,0 kg/m^2, se extiende hasta una tensión uniforme de 10.000 nt/m. Calcular las tres frecuencias naturales más bajas de la vibración trasversal de la membrana. *Respuesta:* $f_1 = 380$, $f_2 = 870$, $f_3 = 1460$ ciclos/seg

1.57. Una membrana cuadrada uniforme de lados L está fija a dos bordes adyacentes. Tiene un desplazamiento inicial $y(x,z,0) = y_0 \operatorname{sen}(2\pi x/L) \operatorname{sen}(3\pi z/L)$. Obtener una expresión de la vibración trasversal libre de la membrana. *Respuesta:* $y(x,z,t) = y_0 \operatorname{sen} \dfrac{2\pi x}{L} \operatorname{sen} \dfrac{3\pi z}{L} \cos \dfrac{13\pi S}{\rho_a L} t$

1.58. Una membrana rectangular uniforme de lados L_1 y L_2 está fija firmemente en todos sus bordes. La membrana está bajo la acción de una fuerza constante F_0 sobre toda su superficie. Si la fuerza se suspende repentinamente, halle la vibración trasversal libre resultante de la membrana.

Respuesta: $y(x,z,t) = \displaystyle\sum_{m=1,3,\ldots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \dfrac{16F_0}{mn\pi^2 p_{mn}^2} \operatorname{sen} \dfrac{m\pi x}{L_1} \operatorname{sen} \dfrac{n\pi z}{L_2} \cos p_{mn} t$

VIBRACION DE PLACAS

1.59. El diafragma de un trasductor sonar electromagnético es una placa de acero circular de radio 0,09 m, y espesor 0,004 m. Encontrar la frecuencia fundamental de la vibración trasversal libre.
Respuesta: $f_1 = 1230$ ciclos/seg

1.60. Determinar la amplitud de desplazamiento promedio de una placa circular uniforme que vibra trasversalmente en su modo fundamental. *Respuesta:* $y_{\text{prom}} = 0{,}31 y_0$

1.61. Una placa de acero circular uniforme, de radio igual a 12 pulgadas y espesor de 1,0 pulgada, está fija en la frontera. ¿Cuál es la frecuencia natural más baja? *Respuesta:* $f_1 = 700$ ciclos/seg

1.62. Una placa de acero rectangular y uniforme, de longitudes 8×4 pies y espesor de $\frac{1}{2}$ pulgada, está sostenida en todos sus bordes. Determine su frecuencia natural más baja. *Respuesta:* 25 ciclos/seg