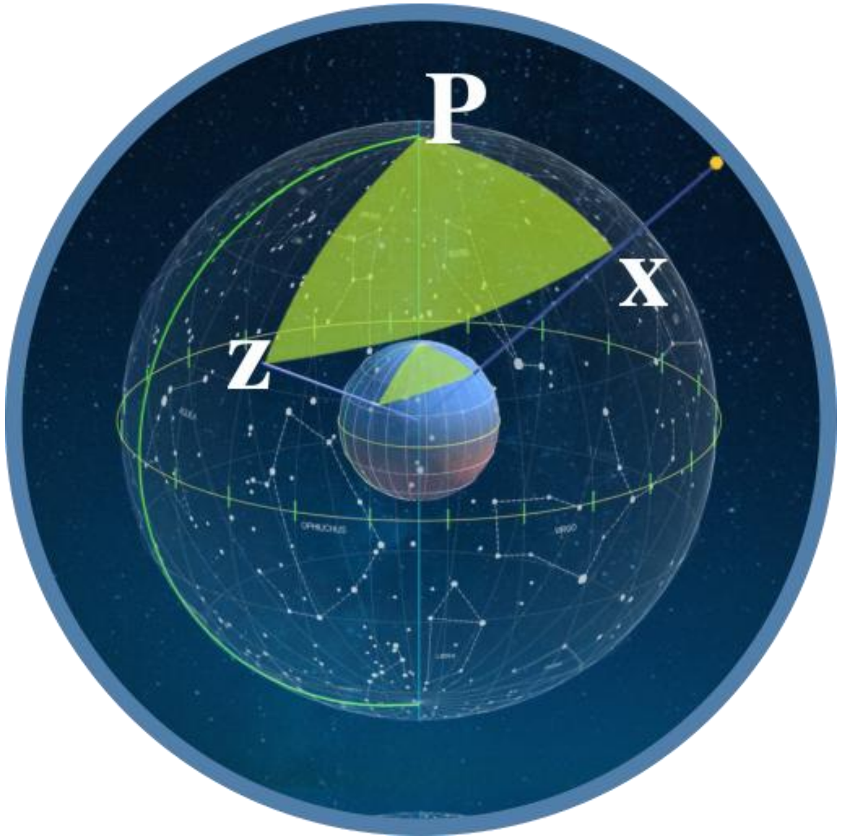
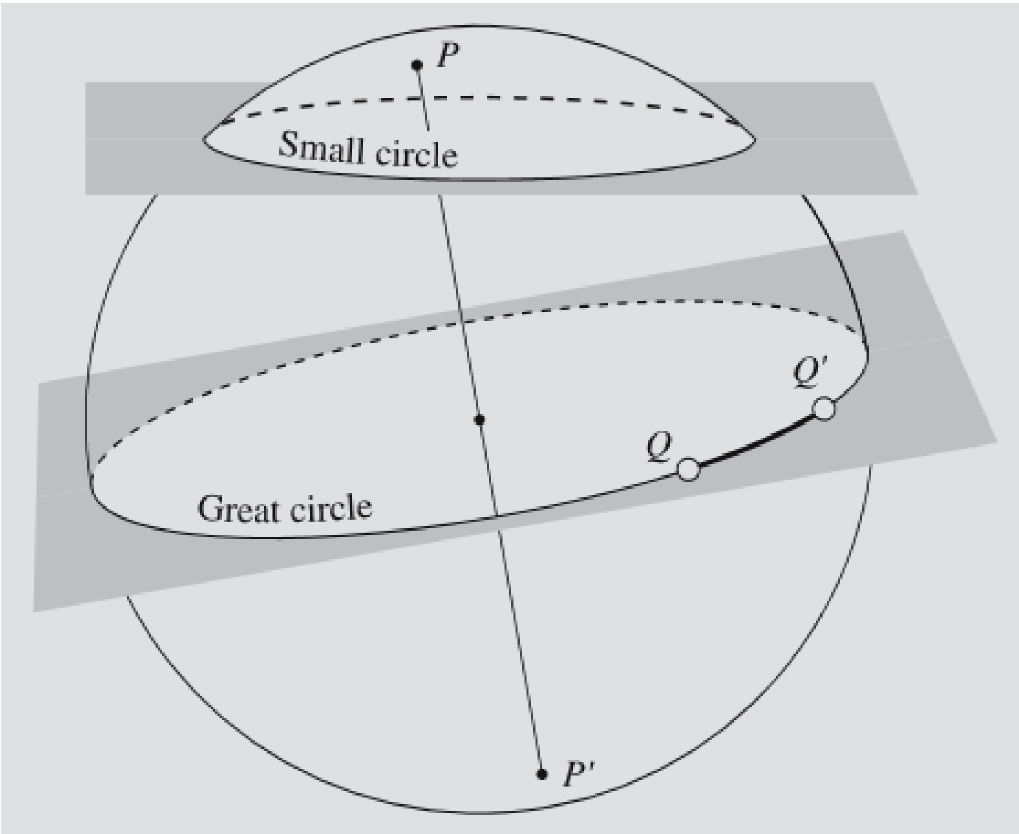
ASTRONOMÍA DE POSICIÓN



Triángulo de Posición

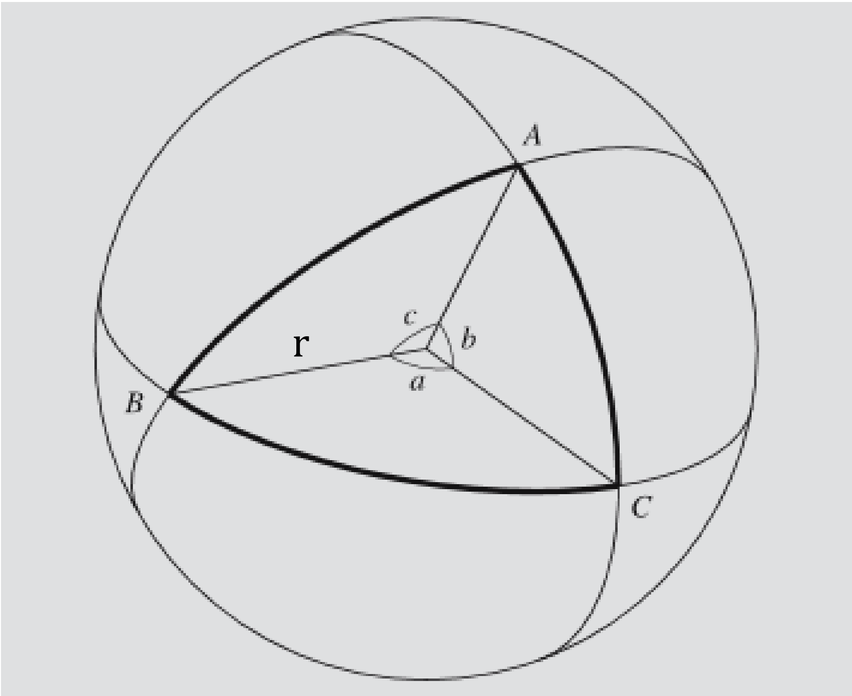
Trigonometría esférica[5]

- Sistemas de coordenadas usados en Astronomía de Posición
- Dirección y movimiento aparente de los cuerpos celestes
- Determinación de posiciones a partir de observaciones astronómicas
- Transformación entre sistemas de coordenadas



Fuente: Karttunen *et al*. (2007)

Triángulo esférico tiene por lados *arcos de círculos máximos* y por ángulos, *ángulos diedros*.



$|AB| = rc$

$c = [rad]$

$E = A + B + C - 180º$

(5) **Karttunen, H., Kröger, P., Oja, H., Poutanen, M., & Donner, K. J. (Eds.). (2016).** ***Fundamental astronomy*****. Springer.**

Triángulo de Posición

Trigonometría esférica[5]

Teorema del Seno

$(\mathrm{sen}\, a)/(\mathrm{sen}\, A) = (\mathrm{sen}\, b)/(\mathrm{sen}\, B) = (\mathrm{sen}\, c)/(\mathrm{sen}\, C)$

Fórmula de los 5 elementos para Lados

$\cos C \,\mathrm{sen}\, a = \cos c \,\mathrm{sen}\, b - \mathrm{sen}\, c \cos c \cos A$

$\cos B \,\mathrm{sen}\, c = \cos b \,\mathrm{sen}\, a - \mathrm{sen}\, b \cos a \cos C$

$\cos A \,\mathrm{sen}\, b = \cos a \,\mathrm{sen}\, c - \mathrm{sen}\, a \cos c \cos B$

Fórmula de los 5 elementos para Ángulos

$\cos b \,\mathrm{sen}\, A = \cos B \,\mathrm{sen}\, C - \mathrm{sen}\, B \cos C \cos a$

$\cos a \,\mathrm{sen}\, C = \cos A \,\mathrm{sen}\, B - \mathrm{sen}\, A \cos B \cos c$

$\cos c \,\mathrm{sen}\, B = \cos C \,\mathrm{sen}\, A - \mathrm{sen}\, C \cos A \cos b$

Teorema del coseno para Lados

$\cos a = \cos b \cos c + \mathrm{sen}\, b \,\mathrm{sen}\, c \cos A$

$\cos b = \cos c \cos a + \mathrm{sen}\, c \,\mathrm{sen}\, a \cos B$

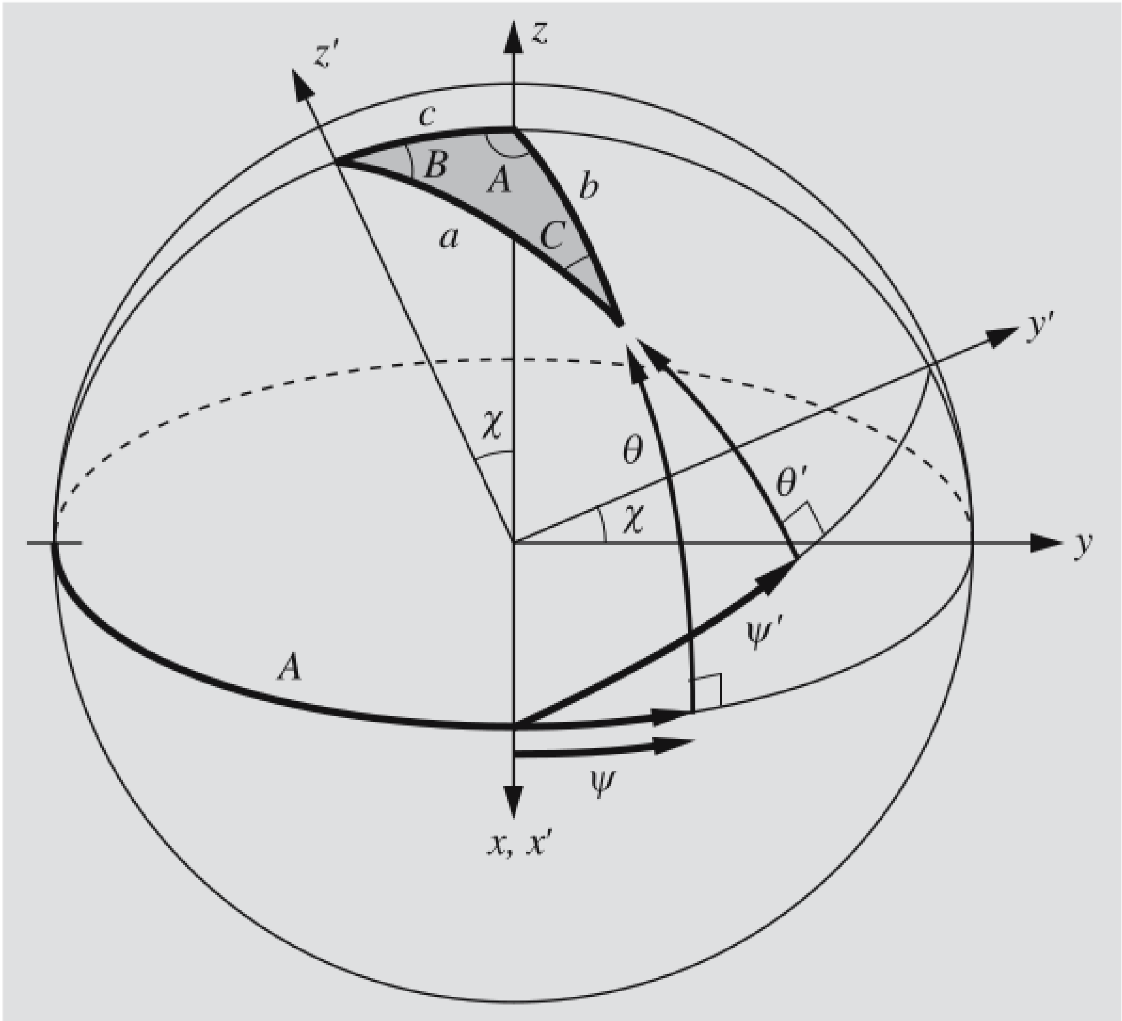
$\cos c = \cos a \cos b + \mathrm{sen}\, a \,\mathrm{sen}\, b \cos C$

Teorema del coseno para Ángulos

$\cos A = - \cos B \cos C + \mathrm{sen}\, B \,\mathrm{sen}\, C \cos a$

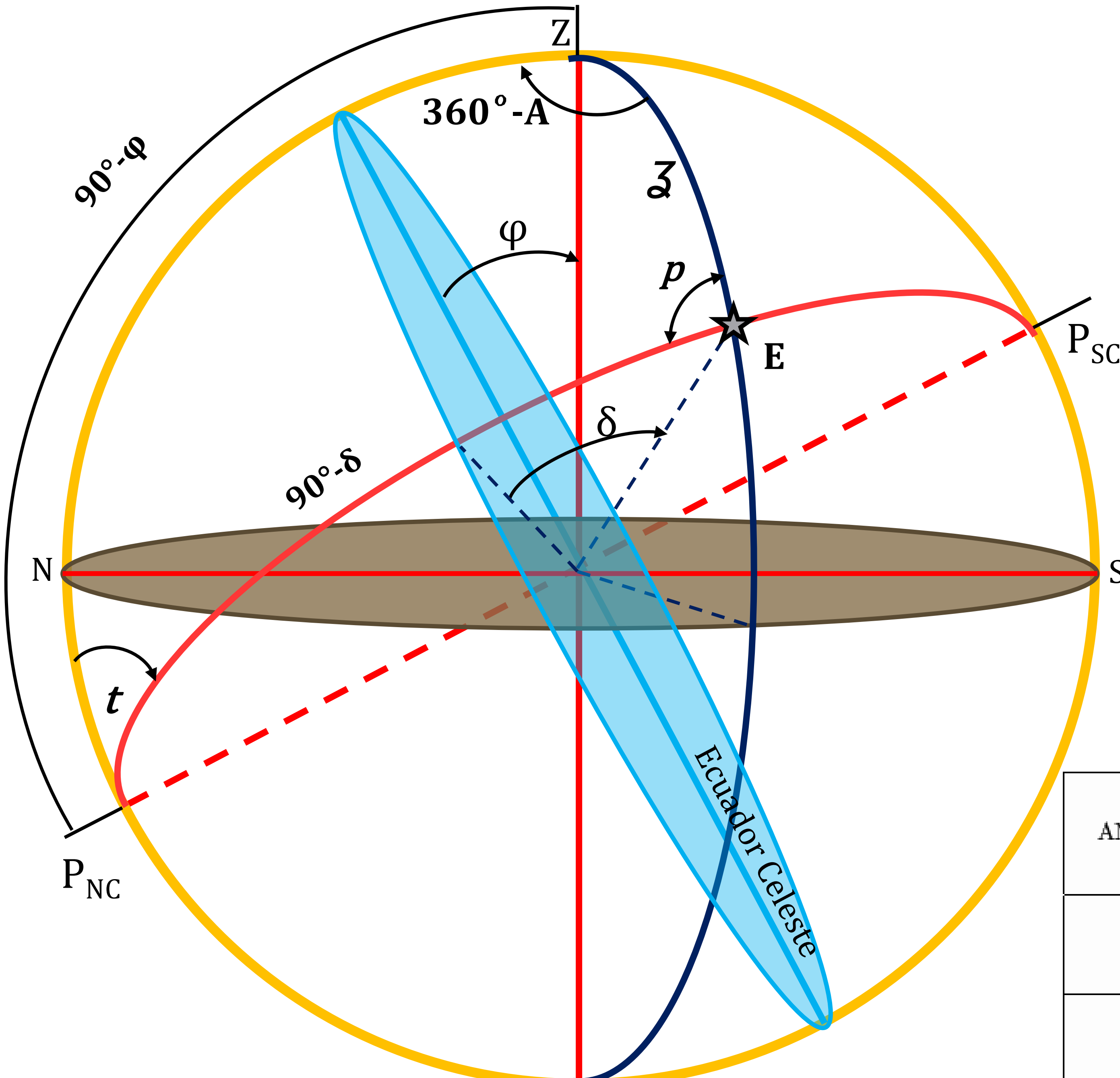
$\cos B = - \cos C \cos A + \mathrm{sen}\, C \,\mathrm{sen}\, A \cos b$

$\cos C = - \cos A \cos B + \mathrm{sen}\, A \,\mathrm{sen}\, B \cos c$



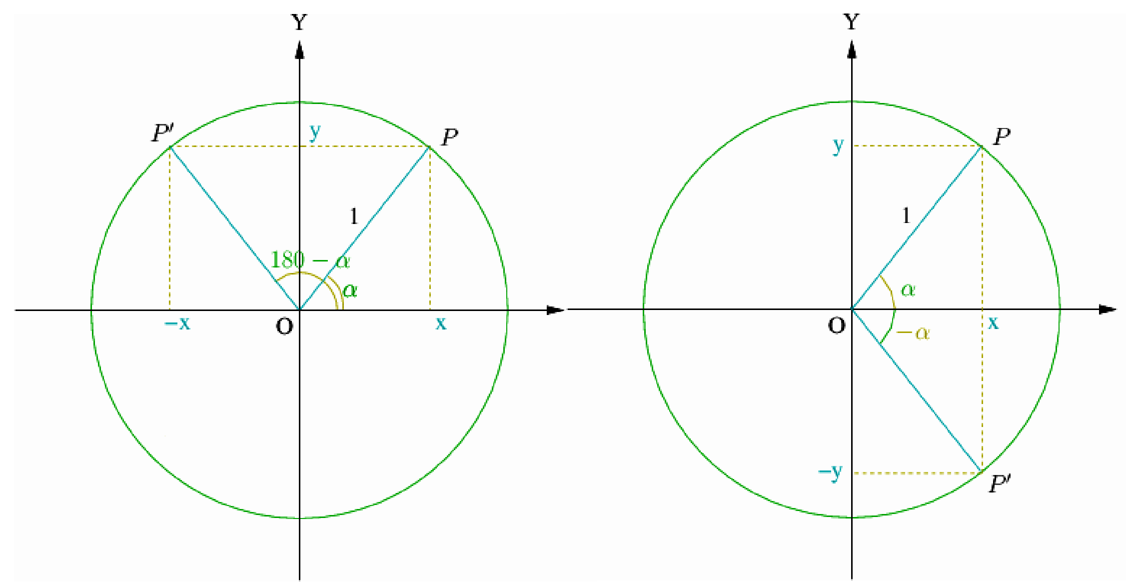
(5) Karttunen, H., Kröger, P., Oja, H., Poutanen, M., & Donner, K. J. (Eds.). (2016). *Fundamental astronomy*. Springer.

Triángulo de Posición(4)



Triángulo esférico $ZP_{NC}E$

Lados	Ángulos
• 90°- φ	• 360°-A
• 90°- δ	• p
• ʒ	• t



ANGULO	$\alpha + 360° \cdot k$, $k \in \mathbb{Z}$	$180° - \alpha$	$180° + \alpha$	$90° + \alpha$	$90° - \alpha$	$-\alpha$
COS	$\cos(\alpha)$	$-\cos(\alpha)$	$-\cos(\alpha)$	$-\text{sen}(\alpha)$	$\text{sen}(\alpha)$	$\cos(\alpha)$
SEN	$\text{sen}(\alpha)$	$\text{sen}(\alpha)$	$-\text{sen}(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$-\text{sen}(\alpha)$

(4) Mueller, I. I. (1969). Spherical and practical astronomy, as applied to geodesy. New York.

Triángulo de Posición[4]

Triángulo esférico $ZP_{NC}E$	
Lados	Ángulos
• $90° - \varphi$	• $360° - A$
• $90° - \delta$	• p
• z	• t

Teorema del Seno

(sen a)/(sen A) = (sen b)/(sen B) = (sen c)/(sen C)

$$\frac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{sen} t} = \frac{\operatorname{sen}(90° - \delta)}{\operatorname{sen}(2\pi - A)} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{sen} t} = -\frac{\cos\delta}{\operatorname{sen} A}$$

Fórmula de los 5 elementos para Lados

cos A sen b = cos a sen c − sen a cos c cos B

$$\cos(2\pi - A)\operatorname{sen} z = \cos(90° - \delta)\operatorname{sen}(90° - \varphi) - \operatorname{sen}(90° - \delta)\cos(90° - \varphi)\cos t$$

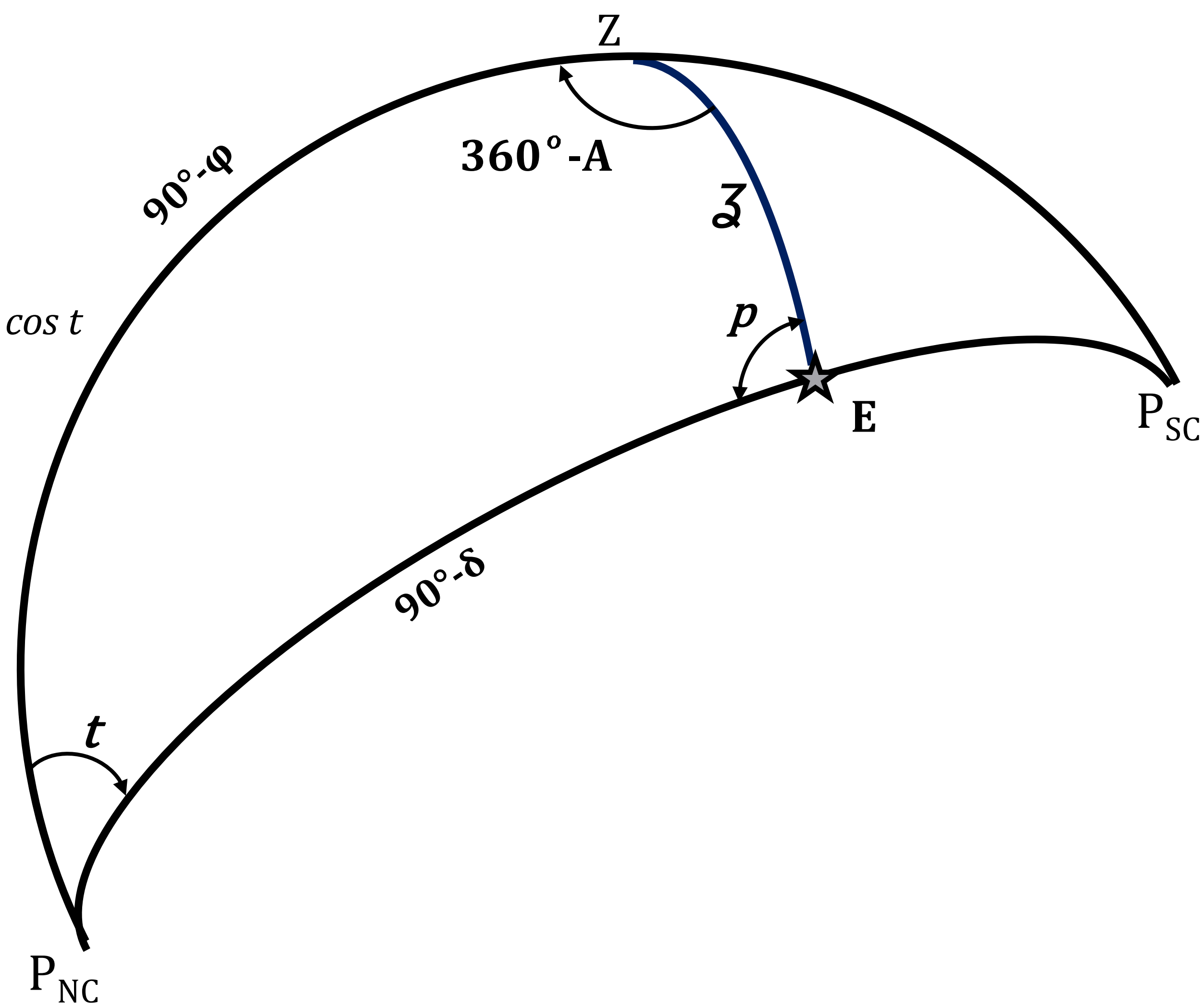
$$\cos A \operatorname{sen} z = \operatorname{sen}\delta\cos\varphi - \cos\delta\operatorname{sen}\varphi\cos t$$

Teorema del coseno para Lados

cos b = cos c cos a + sen c sen a cos B

$$\cos z = \cos(90° - \varphi)\cos(90° - \delta) + \operatorname{sen}(90° - \varphi)\operatorname{sen}(90° - \delta)\cos t$$

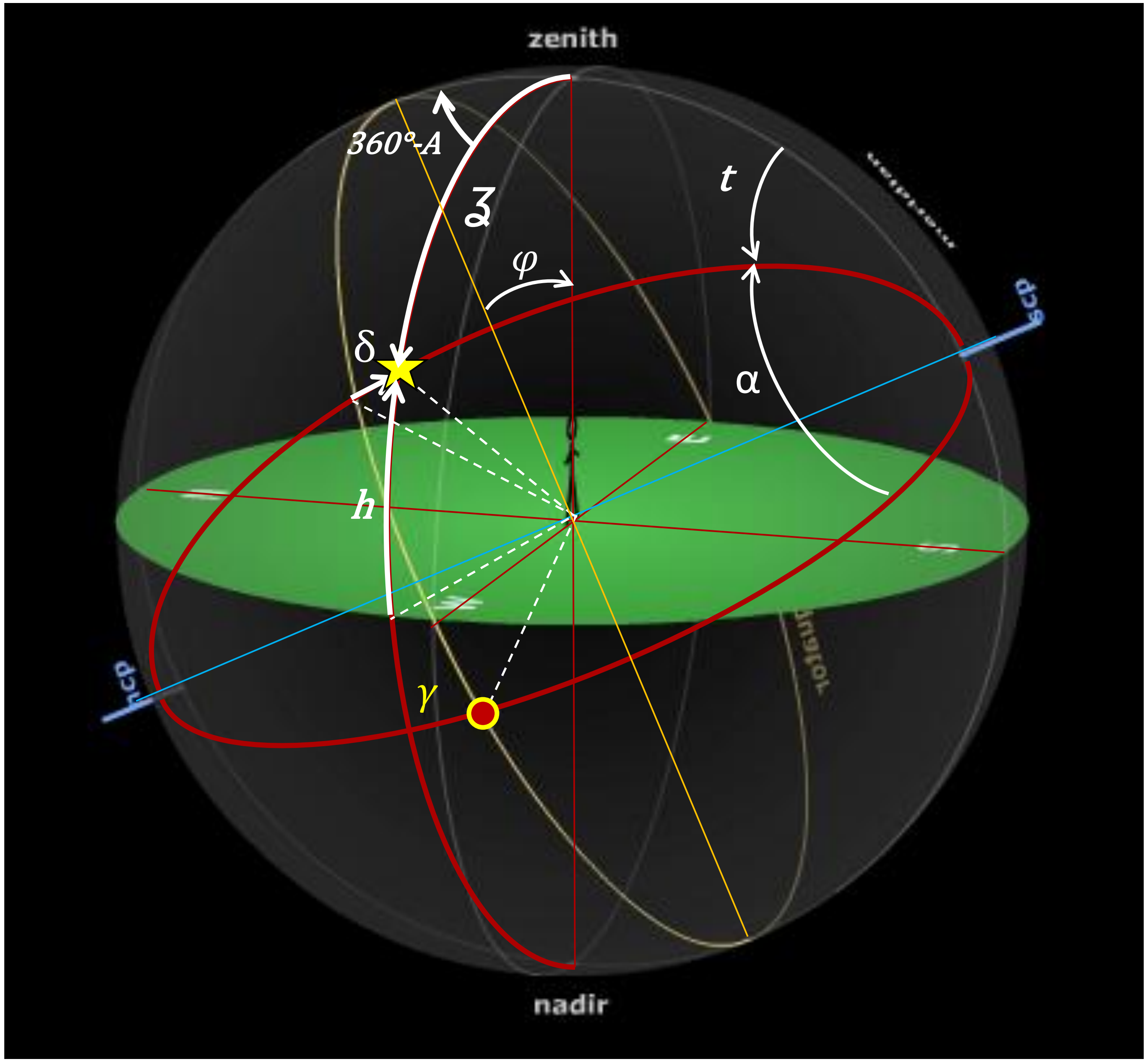
$$\cos z = \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos t$$



(4) Mueller, I. I. (1969). Spherical and practical astronomy, as applied to geodesy. New York.

Transformación de coordenadas

Sistemas de Coordenadas[2,4]



Fuente: https://astro.unl.edu/naap/motion2/motion2.html

(4) Mueller, I. I. (1969). Spherical and practical astronomy, as applied to geodesy. New York.

Transformación de coordenadas

Coordenadas Ecuatoriales Locales a Horizontales(2,4)

Datos

t: ángulo horario

δ: declinación

φ: latitud del lugar (se supone conocida)

Se busca obtener

A: azimut

z: distancia cenital

$$\begin{cases} (1) \quad sen\,z\, sen\,A = -\cos\delta\, sen\,t \\ (2) \quad sen\,z\,\cos A = \cos\varphi\, sen\,\delta - sen\,\varphi\,\cos\delta\,\cos t \\ (3) \quad \cos z = sen\,\varphi\, sen\,\delta + \cos\varphi\,\cos\delta\,\cos t \end{cases}$$

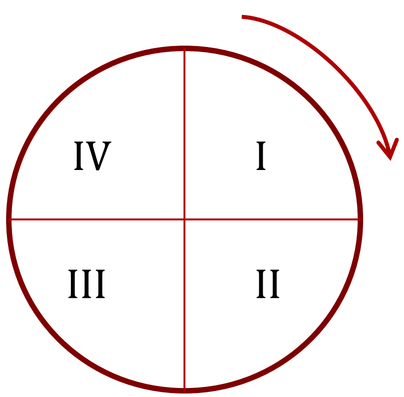
A: azimut

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \boxed{tg\,A = \frac{-\cos\delta\, sen\,t}{\cos\varphi\, sen\,\delta - sen\,\varphi\,\cos\delta\,\cos t}}$$

z : distancia cenital

$$\Rightarrow \boxed{\cos z = sen\,\varphi\, sen\,\delta + \cos\varphi\,\cos\delta\,\cos t}$$

tg A > 0	0° < t < 180°	A en cuadrante III
	180° < t < 360°	A en cuadrante I
tg A < 0	0° < t < 180°	A en cuadrante IV
	180° < t < 360°	A en cuadrante II



Cuadrante	sen	cos	tg	cotg	sec	cosec
I	+	+	+	+	+	+
II	+	-	-	-	-	+
III	-	-	+	+	-	-
IV	-	+	-	-	+	-

(4) Mueller, I. I. (1969). Spherical and practical astronomy, as applied to geodesy. New York.

Transformación de coordenadas

Coordenadas Horizontales a Ecuatoriales Locales(2,4)

Datos

A: azimut

z: distancia cenital

φ: latitud del lugar (se supone conocida)

Se busca obtener

t: ángulo horario

δ: declinación

$$\begin{cases} (1) & \cos\delta\ \operatorname{sen} t = -\operatorname{sen} z\ \operatorname{sen} A \\ (2) & \cos\delta\ \cos t = \cos\varphi\ \cos z - \operatorname{sen}\varphi\ \operatorname{sen} z\ \cos A \\ (3) & \operatorname{sen}\delta = \operatorname{sen}\varphi\ \cos z + \cos\varphi\ \operatorname{sen} z\ \cos A \end{cases}$$

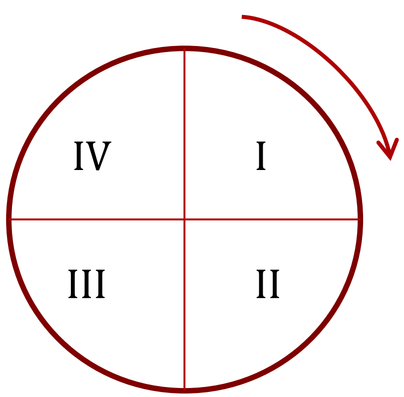
t: ángulo horario

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \boxed{tg\ t = \frac{-\operatorname{sen} z\ \operatorname{sen} A}{\cos\varphi\ \cos z - \operatorname{sen}\varphi\ \operatorname{sen} z\ \cos A}}$$

δ: declinación

$$\boxed{\operatorname{sen}\delta = \operatorname{sen}\varphi\ \cos z - \cos\varphi\ \operatorname{sen} z\ \cos A}$$

$tg\ t > 0$	$0° < A < 180°$	t en cuadrante III
	$180° < A < 360°$	t en cuadrante I
$tg\ t < 0$	$0° < A < 180°$	t en cuadrante IV
	$180° < A < 360°$	t en cuadrante II



Cuadrante	sen	cos	tg	cotg	sec	cosec
I	+	+	+	+	+	+
II	+	-	-	-	-	+
III	-	-	+	+	-	-
IV	-	+	-	-	+	-

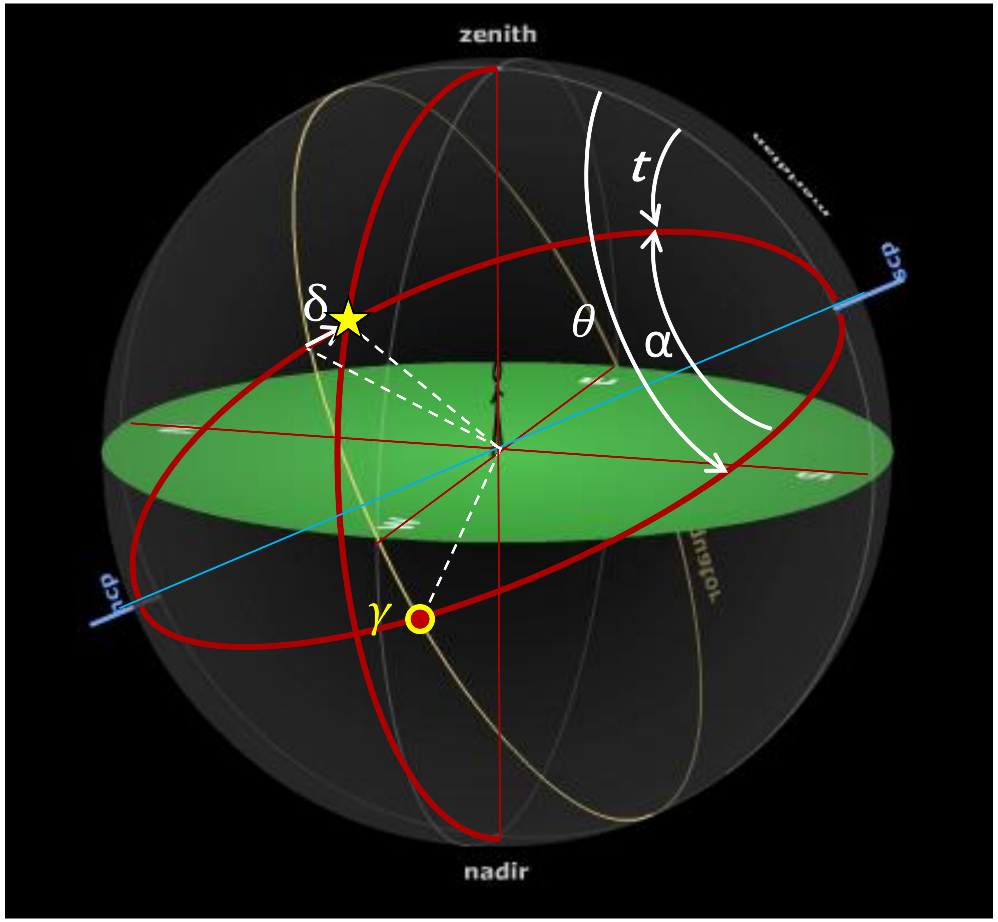
(4) Mueller, I. I. (1969). Spherical and practical astronomy, as applied to geodesy. New York.

Transformación de coordenadas

Coordenadas Ecuatoriales Locales a Ecuatoriales Celestes(2,4)

Transformación entre $t \Leftrightarrow \alpha$

δ: declinación (la misma en ambos sistemas)



Fuente: https://astro.unl.edu/naap/motion2/motion2.html

Tiempo Sidéreo

$\boldsymbol{\theta}$: ángulo horario del punto vernal

$\theta = \alpha + t$

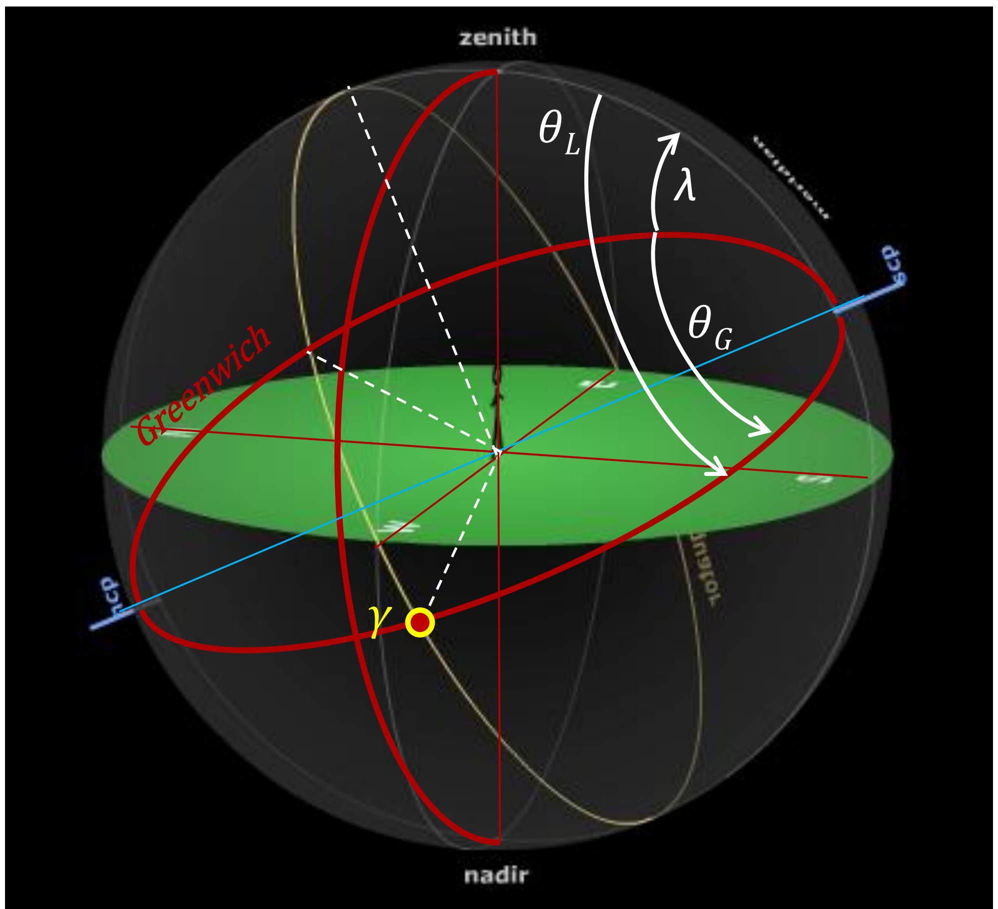
(4) Mueller, I. I. (1969). Spherical and practical astronomy, as applied to geodesy. New York.

Transformación de coordenadas

Coordenadas Ecuatoriales Locales a Ecuatoriales Celestes[2,4]

Transformación entre $t \Leftrightarrow \alpha$

δ: declinación (la misma en ambos sistemas)



Fuente: https://astro.unl.edu/naap/motion2/motion2.html

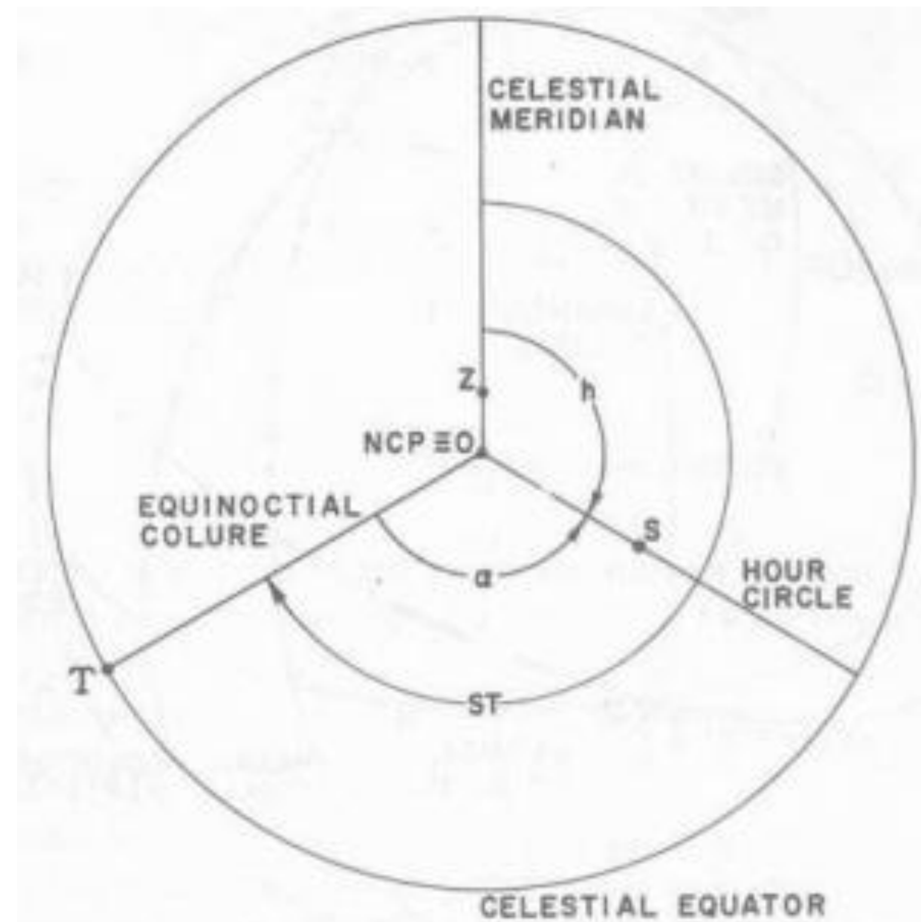
Tiempo Sidéreo

$\boldsymbol{\theta}$: ángulo horario del punto vernal

$\theta = \alpha + t$

$\boldsymbol{\theta_L = \theta}$ *(observador en cualquier punto de la Tierra)*

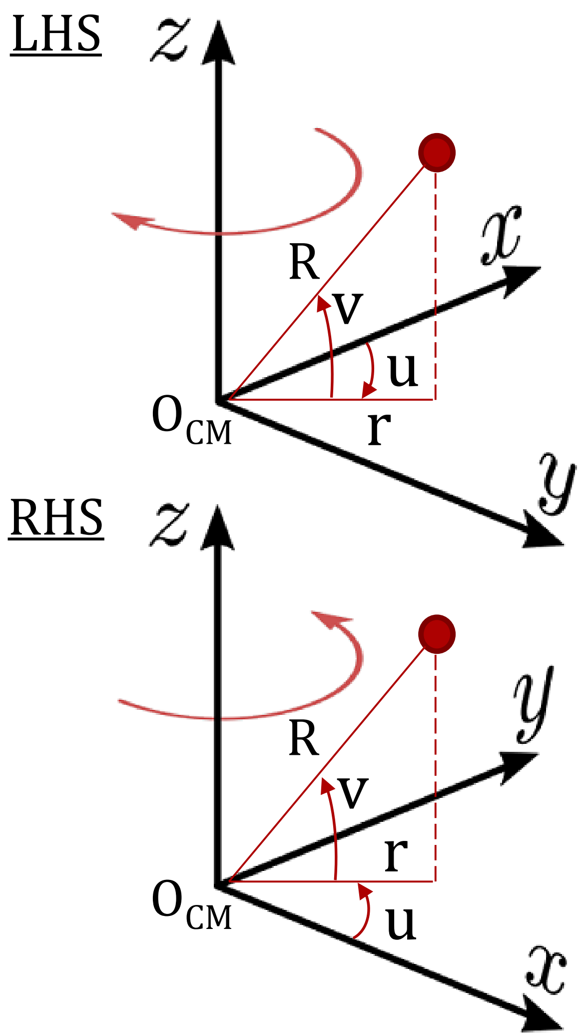
$\boldsymbol{\theta_G = \theta}$ *(observador en Greenwich)*



(4) Mueller, I. I. (1969). Spherical and practical astronomy, as applied to geodesy. New York.

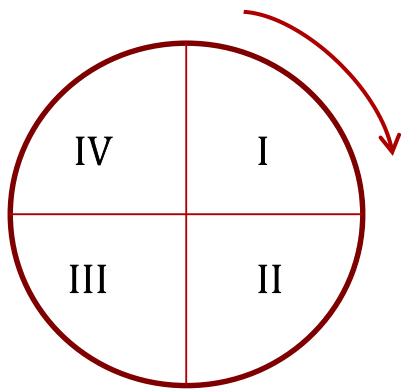
Transformación de coordenadas

Coordenadas curvilíneas[4]



$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{u,v} = \begin{pmatrix} r\,cos\,u \\ r\,sen\,u \\ sen\,v \end{pmatrix};\; r = R\,cos\,v\,;\;\; R = arbitrario$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{u,v} = \begin{pmatrix} \cos v\,cos\,u \\ cos\,v\,sen\,u \\ sen\,v \end{pmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \tan^{-1}\left({}^{Y}\!/_{X}\right) \\ v = \tan^{-1}\left({}^{Z}\!/_{\sqrt{X^2+Y^2}}\right) = \sin^{-1} Z \end{array} \right.$$



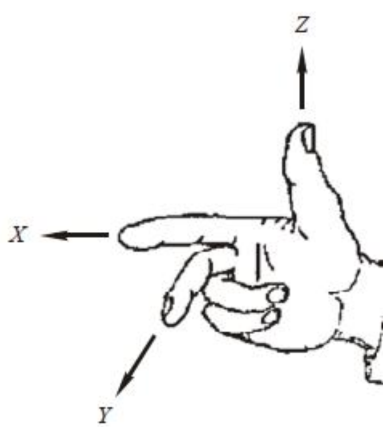
Cuadrante	sen	cos	tg	cotg	sec	cosec
I	+	+	+	+	+	+
II	+	-	-	-	-	+
III	-	-	+	+	-	-
IV	-	+	-	-	+	-

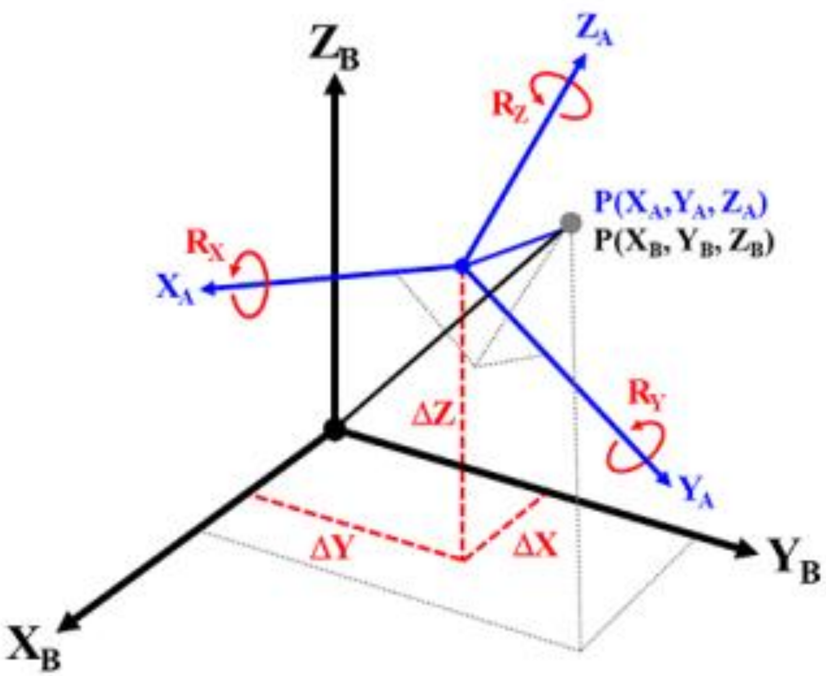
(4) Mueller, I. I. (1969). Spherical and practical astronomy, as applied to geodesy. New York.

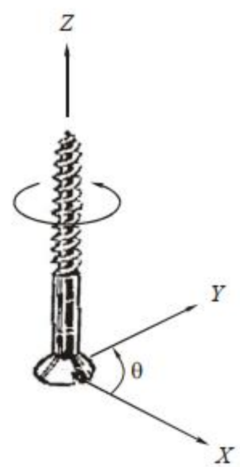
Transformación de coordenadas

Relación entre 2 Sistema de Coordenadas Cartesianas[4]

Caso general de RHS







Algunas propiedades:

$$X = R\,X' \;\rightarrow\; X' = R^{-1}X$$

$$\mathrm{R}\,X \neq X\,R$$

$$\left(R_i R_j\right)^{-1} = R_j^{-1}R_i^{-1}$$

$$R^{-1}(\theta) = R(-\theta)$$

Traslación (no aplica en nuestro caso)

$$X_B = T + R\,X_A$$

Rotación

$$X_B = (R_1(R_2(R_3 X_A)))$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos R_X & \sin R_X \\ 0 & -\sin R_X & \cos R_X \end{bmatrix};$$

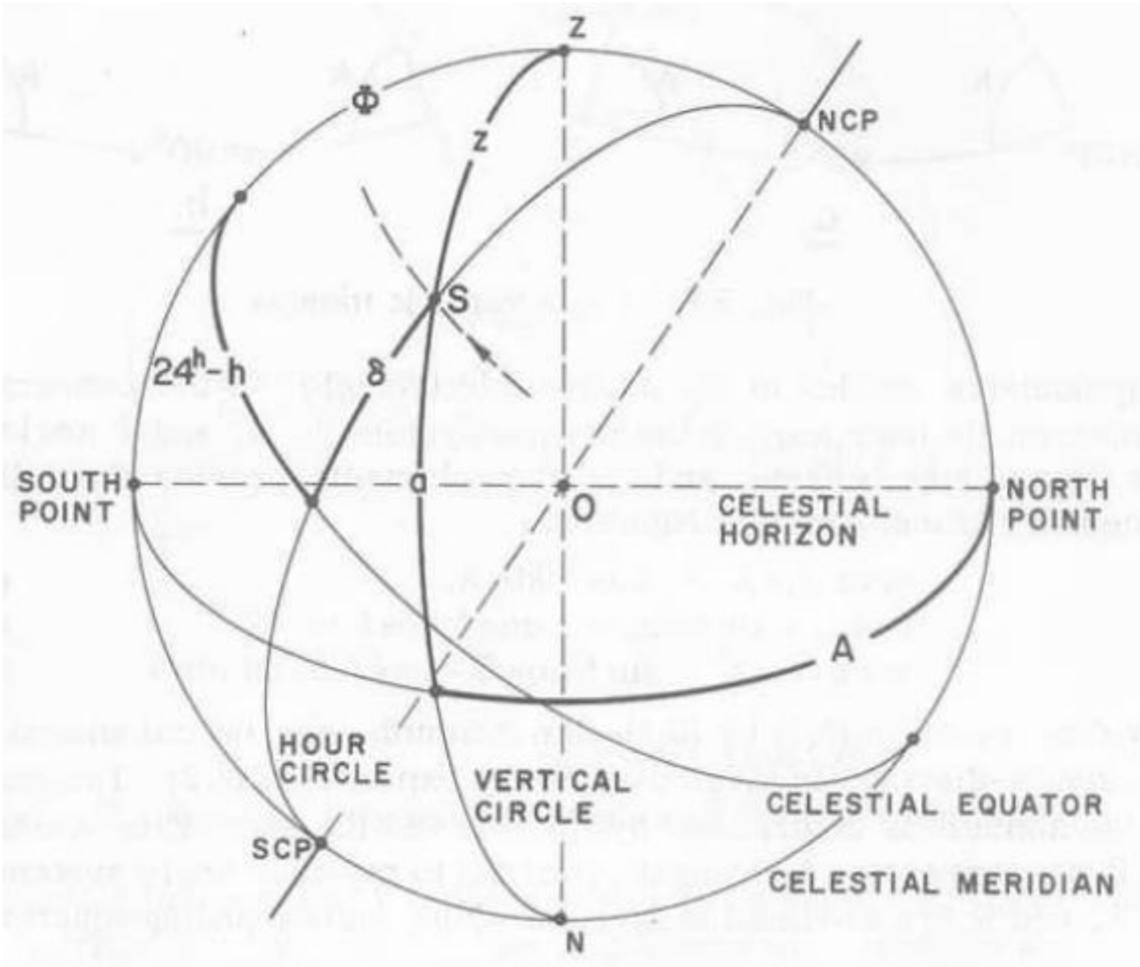
$$R_2 = \begin{bmatrix} \cos R_Y & 0 & -\sin R_Y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin R_Y & 0 & \cos R_Y \end{bmatrix};$$

$$R_3 = \begin{bmatrix} \cos R_Z & \sin R_Z & 0 \\ -\sin R_Z & \cos R_Z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(4) Mueller, I. I. (1969). Spherical and practical astronomy, as applied to geodesy. New York.

Transformación de coordenadas

Relación entre Sistema Horizontal y Ec. Horario(4)



Transformación: $\boldsymbol{A, a} \Rightarrow \boldsymbol{t, \delta}$

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix}_{t,\delta} = R_{\alpha_2}\big(-(90° - \varphi)\big)\ R_{\alpha_3}(180°) \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}_{A,a}$$

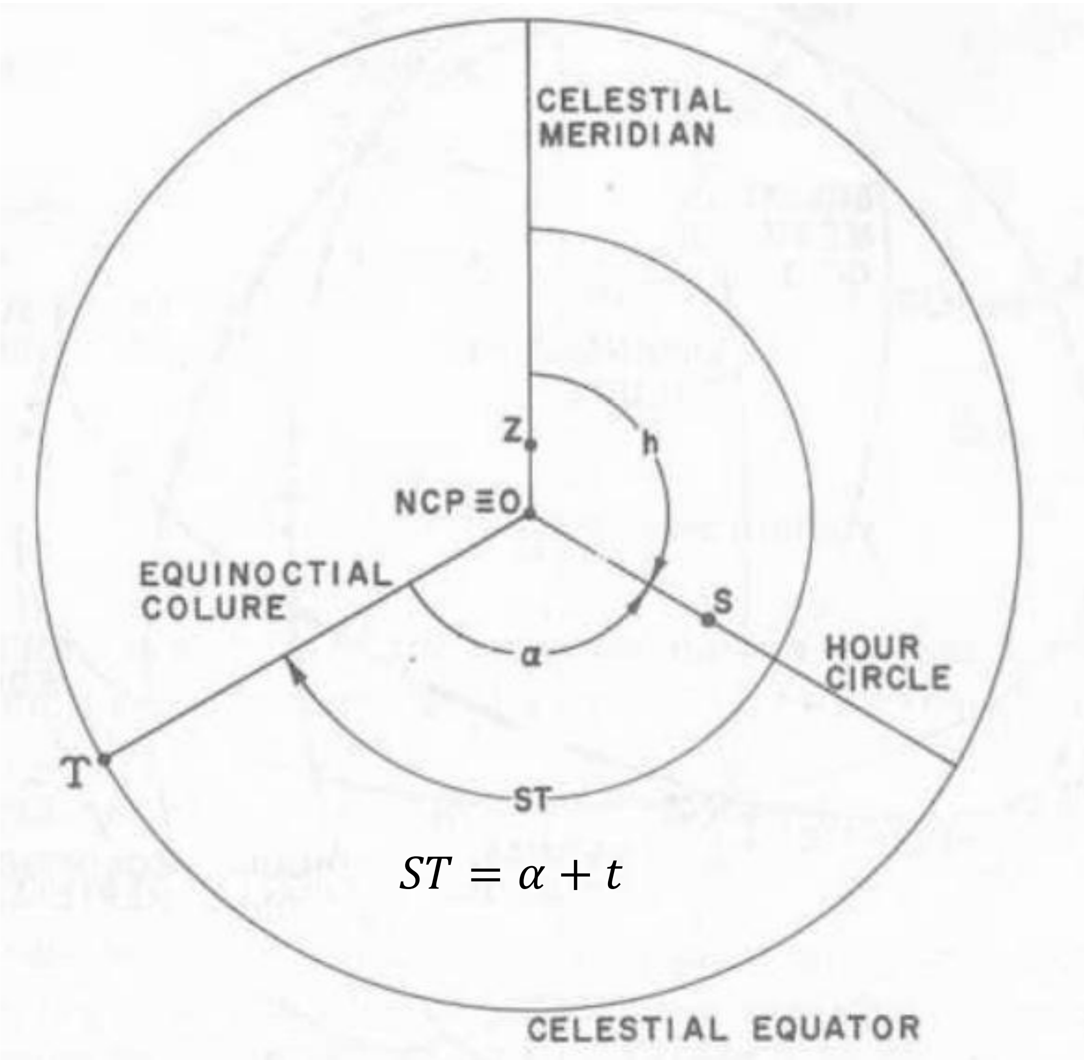
Transformación: $\boldsymbol{t, \delta} \Rightarrow \boldsymbol{A, a}$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}_{A,a} = R_{\alpha_3}(-180°)\ R_{\alpha_2}(90° - \varphi) \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix}_{t,\delta}$$

(4) Mueller, I. I. (1969). Spherical and practical astronomy, as applied to geodesy. New York.

Transformación de coordenadas

Relación entre Sistema Ec. Horario y Ec. Celeste[4]



$$ST = \alpha + t$$

Transformación: $\boldsymbol{t, \delta} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha, \delta}$

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix}_{\alpha,\delta} = R_{\alpha_3}(-ST)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}_{t,\delta}$$

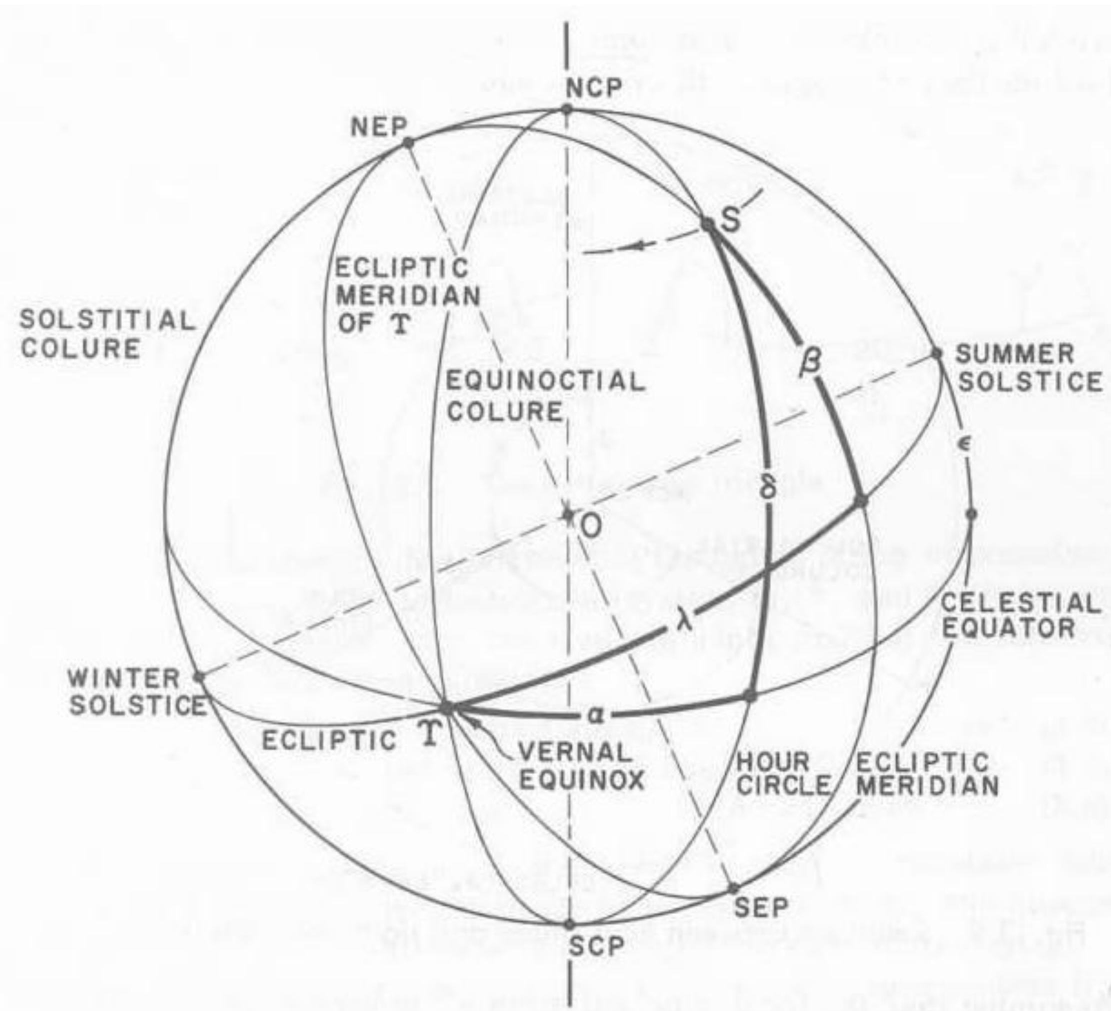
Transformación: $\boldsymbol{\alpha, \delta} \Rightarrow \boldsymbol{t, \delta}$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}_{t,\delta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R_{\alpha_3}(ST)\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix}_{\alpha,\delta}$$

(4) Mueller, I. I. (1969). Spherical and practical astronomy, as applied to geodesy. New York.

Transformación de coordenadas

Relación entre Sistema Ec. Celeste y Eclíptica(4)



Transformación: $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\delta} \Rightarrow \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\beta}$

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix}_{\lambda,\beta} = R_{\alpha_1}(\varepsilon) \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}_{\alpha,\delta}$$

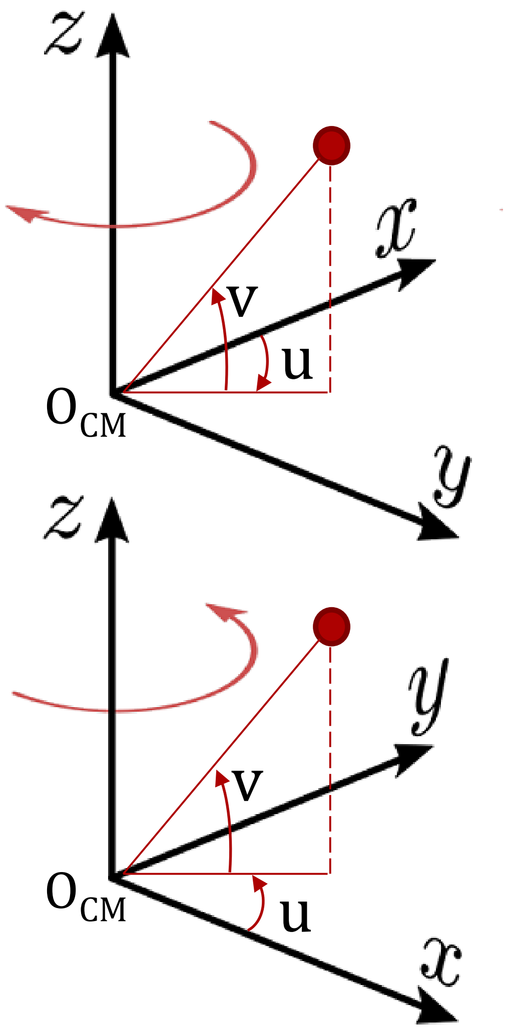
Transformación: $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\delta} \Rightarrow \boldsymbol{t}, \boldsymbol{\delta}$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}_{\alpha,\delta} = R_{\alpha_1}(-\varepsilon) \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix}_{\lambda,\beta}$$

(4) Mueller, I. I. (1969). Spherical and practical astronomy, as applied to geodesy. New York.

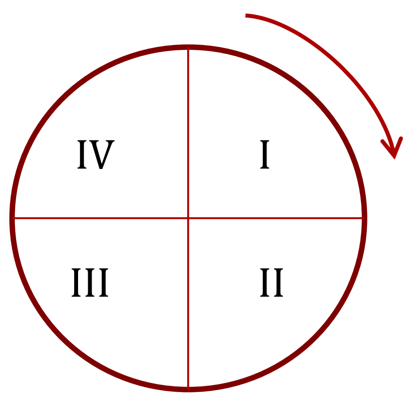
Transformación de coordenadas

Coordenadas curvilíneas[4]



$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{u,v} = \begin{pmatrix} \cos v \cos u \\ \cos v \, sen\, u \\ sen\, v \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} u = \tan^{-1}\left({}^{Y}/_{X} \right) \\ v = \tan^{-1}\left({}^{Z}/_{\sqrt{X^2+Y^2}} \right) = \sin^{-1} Z \end{cases}$$



Cuadrante	sen	cos	tg	cotg	sec	cosec
I	+	+	+	+	+	+
II	+	-	-	-	-	+
III	-	-	+	+	-	-
IV	-	+	-	-	+	-

(4) Mueller, I. I. (1969). Spherical and practical astronomy, as applied to geodesy. New York.