

NOTAS DE CLASE DE GEOMETRÍA SUPERIOR

RESUMEN. Estas son notas de un curso de Geometría Superior de FAMAF. Pueden tener algunos errores de tipo.

1. BREVE REPASO DE CÁLCULO DE VARIAS VARIABLES

Esta sección contiene algunas cosas que necesitamos refrescar para poder entender la noción de diferencial de una función entre variedades. Mas tarde agregaremos algunas otras herramientas del Análisis III que necesitaremos mas adelante.

Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Consideramos $r_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la i -ésima proyección dada por

$$r_i(x_1, \dots, x_n) = r_i\left(\sum_j x_j e_j\right) = x_i.$$

La derivada de funciones de $\mathbb{R}$ a valores en $\mathbb{R}^n$, o curvas. Si $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una curva definida en un intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$, su derivada o velocidad instantánea en $a \in I$ es por definición

$$\alpha'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(a+h) - \alpha(a)}{h}.$$

Llamando $x_i = r_i \circ \alpha$, i.e. las funciones coordenadas de α , entonces se tiene

$$\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad \alpha'(t) = (x_1'(t), \dots, x_n'(t)), \quad t \in I.$$

Por otra parte dada una función $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida en un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, sea $a \in U$. La i -ésima derivada parcial de f en $a \in U$ se define por

$$\frac{\partial f}{\partial r_i}(a) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(a + te_i).$$

Nota: tener presente que la existencia de derivadas parciales en un punto es una condición débil, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.1. Sea $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, para $(x, y) \neq (0, 0)$ y $f(0, 0) = 0$. Entonces f tiene derivadas parciales en todo punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pero no es continua en $(0, 0)$.

Recordemos la definición de diferenciabilidad que aprendimos en Análisis Matemático III para funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$:

Definición 1.1. Sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función definida en un subconjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ f se dice diferenciable en $a \in U$ si existe $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineal tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{\|h\|} = 0.$$

Tenemos entonces la siguiente

Proposición 1.1. Si tal L existe, entonces es única y se llama la diferencial o derivada de f en a y se denota por df_a .

Para hallar L en general recurrimos al siguiente resultado

2010 *Mathematics Subject Classification.* 53C42.

Key words and phrases. variedades diferenciables.

Proposición 1.2. Sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función definida en un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, tal que $\frac{\partial f_j}{\partial r_i}$ existen y son continuas en U , donde $f = (f_1, \dots, f_m)$. Entonces la matriz de df_a en la base canónica está dada por

$$[df_a] = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial r_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial r_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial r_n}(a) \end{pmatrix}, \quad a \in U.$$

Un resultado básico que usaremos es la regla de la cadena:

Teorema 1.3. *Regla de la Cadena.*

Si $f : U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ y $g : V \rightarrow \mathbb{R}^p$ y tomamos $a \in U$, con f diferenciable en a y g diferenciable en $f(a)$, entonces $g \circ f$ es diferenciable en a y $d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a$.

Recordemos además el teorema de la igualdad de las derivadas cruzadas:

Proposición 1.4. Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, donde U es abierto. Si $\frac{\partial^2 f}{\partial r_i \partial r_j}$ existen y son continuas $\forall i, j$, entonces

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r_i \partial r_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial r_j \partial r_i}, \quad \forall i, j.$$

Definición 1.2. Sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, con $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto. f se dice de clase C^k en U , con $k \in \mathbb{N}$, si existen las derivadas parciales de orden k de f en U :

$$\frac{\partial^\alpha f}{\partial^{i_m} r_m, \dots, \partial^{i_1} r_1}, \quad \alpha = i_1 + \dots + i_m \leq k,$$

y son continuas en U .

f se dice de clase C^∞ en U si es de clase C^k para todo $k \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 1.2. $f(x, y, z) = (xe^{x+z}, y \sin(z))$ es de clase C^∞ en todo $\mathbb{R}^2$.

2. VARIEDADES DIFERENCIABLES

Definición 2.1. Un espacio topológico M se dice localmente euclideo si cada punto $p \in M$ tiene un entorno abierto homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^n$. O sea para todo $p \in M$ existe un abierto $U \subseteq M$, $p \in U$, y un homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$.

El par (U, φ) se llama sistema coordenado, carta coordenada o mapeo coordenado. Denotando r_i la i -ésima función coordenada en $\mathbb{R}^n$ tenemos

$$\varphi = (x_1, \dots, x_n), \quad r_i \circ \varphi = x_i.$$

Nota: Se puede probar que un abierto de $\mathbb{R}^n$ puede ser homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^m$ sólo si $n = m$ (teorema de invariancia del dominio). Luego la dimensión de un espacio localmente euclideo y conexo M está unívocamente determinada.

Ejercicio 2.1. La $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$ no es homeomorfa a un abierto de $\mathbb{R}^n$, por qué? En otras palabras, no existe un sistema coordenado global en la esfera.

Definición 2.2. Dos sistemas coordenados $(U, \varphi), (V, \psi)$ se dicen C^∞ -compatibles si las funciones

$$\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(V \cap U) \rightarrow \varphi(V \cap U), \quad \psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(V \cap U) \rightarrow \psi(V \cap U),$$

son ambas C^∞ , en el sentido usual de Análisis III. Esto tiene sentido ya que $\psi(V \cap U)$ y $\varphi(V \cap U)$ son abiertos de $\mathbb{R}^n$. Observar que si $U \cap V = \emptyset$ la compatibilidad es automática.

Nota 2.1. A lo largo del curso trabajaremos con sistemas C^∞ -compatibles. Pero también se puede trabajar con sistemas que son sólo C^k -compatibles.

Definición 2.3. Sea M un espacio topológico localmente euclideo de dimensión n . Un atlas de M de clase C^∞ es una colección $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in A\}$ de sistemas coordenados tales que

(i) $M = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$, es decir que los U_α cubren M .

(ii) Compatibilidad de las cartas de $\mathcal{A}$: $\forall \alpha, \beta \in A$ tales que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, se cumple que

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta), \text{ es } C^\infty, \text{ en el sentido usual, donde } U = U_\alpha \cap U_\beta.$$

Las funciones $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ se llaman cambios de coordenadas o funciones de transición.

Nota: observar que la condición de compatibilidad pide que tanto $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ como $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ sean C^∞ .

Ejemplo 2.1. Cartas coordenadas en la esfera

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Fijamos la topología inducida en S^2 y consideramos los siguientes subconjuntos (casquetes) abiertos de S^2 que la cubren:

$$U_i^+ = \{x \in S^2 : x_i > 0\}, \quad U_i^- = \{x \in S^2 : x_i < 0\}, \quad 1 \leq i \leq 3.$$

Sean además $\varphi_i^\pm : U_i^\pm \rightarrow B_1(0, 0) \subset \mathbb{R}^2$ definidos por

$$\varphi_1^\pm(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3), \quad \varphi_2^\pm(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_3), \quad \varphi_3^\pm(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2).$$

Es fácil verificar que los $\varphi_i^\pm$ son homeomorfismos locales de S^2 y que son compatibles. Por ejemplo

$$\varphi_1^+ \circ (\varphi_3^-)^{-1}(x_1, x_2) = \varphi_1^+(x_1, x_2, -\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}) = (x_2, -\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}),$$

que es claramente C^∞ .

Mas adelante vamos a generalizar esta construcción al caso de la esfera $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Ejemplo 2.2. Un atlas distinguido para la circunferencia. Sea S^1 el conjunto formado por los numeros complejos de módulo uno $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ con la topología inducida de $\mathbb{R}^2$. Se definen

$$\varphi_1 : (0, 2\pi) \rightarrow S^1 - \{1\}, \quad \varphi_2 : (-\pi, \pi) \rightarrow S^1 - \{-1\},$$

con $\varphi_1(t) = e^{it}$, $0 < t < 2\pi$, $\varphi_2(t) = e^{it}$, $-\pi < t < \pi$.

(a) Probar que $\varphi_1^{-1} : S^1 - \{1\} \rightarrow (0, 2\pi)$ y $\varphi_2^{-1} : S^1 - \{-1\} \rightarrow (-\pi, \pi)$ son homeomorfismos.

- (b) Probar que $\varphi_1^{-1}, \varphi_2^{-1}$ son C^∞ compatibles y hallar explícitamente las funciones de transición entre ellos.
- (c) Definir sistemas coordenados sobre S^1 de manera análoga al que consideramos en S^2 y probar que forman un atlas. Son compatibles estos sistemas con los definidos arriba?

Definición 2.4. Un atlas $\mathcal{F}$ de clase C^∞ en un espacio localmente euclideo M de dimensión n se dice que es maximal, si lo es respecto de la propiedad (ii) de la definición de atlas. Es decir que satisface la siguiente condición:

Si un sistema de coordenadas (V, ψ) de M cumple que $\psi \circ \varphi^{-1}$ y $\varphi \circ \psi^{-1}$ son C^∞ para todo $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$, entonces $(V, \psi) \in \mathcal{F}$.

Definición 2.5. Sea M un espacio topológico localmente euclideo T_2 y N_2 , de dimensión n . Una estructura diferenciable de clase C^∞ es un atlas maximal C^∞ , $\mathcal{F}$ de M . Una variedad diferenciable de dimensión n es un par $(M, \mathcal{F})$ como describimos arriba.

Teorema 2.1. Sea M un espacio topológico localmente euclideo T_2 y N_2 de dimensión n y sea $\mathcal{A}$ un atlas en M . Entonces existe un único atlas maximal $\mathcal{F}$, C^∞ de M que contiene a $\mathcal{A}$.

Demostración. Consideramos el conjunto de todas las cartas de M que son compatibles con las cartas de $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{F} = \{(U, \varphi) \text{ sistema coordenado} : \varphi \circ \varphi_\beta^{-1} \text{ y } \varphi_\beta \circ \psi^{-1} \text{ son } C^\infty, \forall \varphi_\beta \text{ con } (U_\beta, \varphi_\beta) \in \mathcal{A}\}.$$

De la definición de $\mathcal{F}$ sigue que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$. Veamos que $\mathcal{F}$ es un atlas de M . Como los abiertos U_α de las cartas de $\mathcal{A}$ cubren M , con más razón los abiertos de las cartas de $\mathcal{F}$ también cubren M . Sean ahora $(U, \varphi), (V, \psi)$ dos cartas de $\mathcal{F}$ tales que $U \cap V \neq \emptyset$. Debemos probar que ellas son C^∞ compatibles. Tomemos un sistema coordenado $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ en $\mathcal{A}$ tal que $p \in U_\alpha$. Entonces

$$\varphi \circ \psi^{-1} = \varphi \circ \varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\alpha \circ \psi^{-1},$$

de donde deducimos que $\varphi \circ \psi^{-1}$ es C^∞ . Por un razonamiento similar vemos que también $\psi \circ \varphi^{-1}$ es C^∞ . Luego $\mathcal{F}$ es un atlas C^∞ en M .

Si (U, φ) es una carta C^∞ -compatible con toda carta de $\mathcal{F}$, en particular lo es con toda carta de $\mathcal{A}$. Entonces $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$, lo que prueba que $\mathcal{F}$ es maximal.

Si hubiera otro atlas maximal $\mathcal{F}'$ conteniendo a $\mathcal{A}$, entonces toda carta de $\mathcal{F}'$ sería C^∞ -compatible con las cartas de $\mathcal{A}$, luego $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$. Luego por maximalidad $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$. $\square$

Ejemplo 2.3. $M = \mathbb{R}^n$, con la topología usual. El atlas de una sola carta $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^n, Id)\}$, determina la estructura diferenciable usual de $\mathbb{R}^n$ que denotamos por $(\mathbb{R}^n, id)$.

Ejemplo 2.4. $M = \mathbb{R}$, con la topología usual. El atlas $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}, \varphi)\}$, donde $\varphi(x) = x^3$ determina otra estructura diferenciable en $\mathbb{R}$ que denotamos por $(\mathbb{R}, \varphi)$. Probar que $(\mathbb{R}, id) \neq (\mathbb{R}, \varphi)$.

2.1. La estructura diferenciable canónica en un espacio vectorial. En este ejemplo probaremos que todo espacio vectorial tiene una estructura diferenciable natural o canónica.

Sea V un espacio vectorial real de dimensión n . Eligiendo una base $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ todo vector $v \in V$ se escribe de manera única como $v = \sum_{i=1}^n x_i u_i$. Definimos un candidato a sistema coordenado global en V :

$$\varphi_B : V \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \varphi_B(v) = (x_1, \dots, x_n),$$

que son las coordenadas de v en la base B . Si bien no tenemos aun una topología en V , podemos traer abiertos de $\mathbb{R}^n$ via φ_B , de manera que $\varphi_B : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ resulte un homeomorfismo. Llamemos τ_B a esa topología. Entonces (V, φ_B) es un sistema de coordenadas en V . Depende esta topología de la base B ? Si cambiamos a otra base $C = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V y consideramos la aplicación

$$\varphi_C : V \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \varphi_C\left(\sum_{i=1}^n y_i v_i\right) = (y_1, \dots, y_n),$$

llamando τ_C la topología en V cuyos abiertos son los traídos por φ_C de $\mathbb{R}^n$, veamos que ambas topologías coinciden. En efecto tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} (V, \tau_B) & \xrightarrow{Id} & (V, \tau_C) \\ \varphi_B \downarrow & & \downarrow \varphi_C \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

donde A es la transformación lineal de cambio de coordenadas entre las dos bases. De manera que se verifica

$$A \circ \varphi_B = \varphi_C \circ Id,$$

de donde se tiene que

$$Id = \varphi_C^{-1} \circ A \circ \varphi_B.$$

Como φ_C, φ_B son homeomorfismos y A es lineal inversible (y por tanto un homeomorfismo), resulta que id es un homeomorfismo de donde sigue que $\tau_C = \tau_B$.

Ahora sean $\mathcal{A}_B = \{(V, \varphi_B)\}$, $\mathcal{A}_C = \{(V, \varphi_C)\}$ los dos atlas en V determinados por los homeomorfismos φ_B, φ_C y consideramos los atlas maximales $\mathcal{F}_B, \mathcal{F}_C$ que contienen a $\mathcal{A}_B$ y $\mathcal{A}_C$ respectivamente. Veamos que $\mathcal{F}_B = \mathcal{F}_C$. Para esto primero observamos que φ_B y φ_C son compatibles. En efecto, del hecho que el diagrama de arriba es conmutativo se desprende que $\varphi_C \circ \varphi_B^{-1} = A$, que es diferenciable por ser lineal. Análogamente tenemos $\varphi_B \circ \varphi_C^{-1} = A^{-1}$ que es diferenciable por ser lineal. Sea ahora $(U, \psi) \in \mathcal{F}_B$ compatible con (V, φ_B) . Veamos que (U, ψ) es compatible con (V, φ_C) :

$$\varphi_C \circ \psi^{-1} = \varphi_C \circ \varphi_B^{-1} \circ \varphi_B \circ \psi^{-1} = A \circ (\varphi_B \circ \psi^{-1}),$$

lo que implica que $\varphi_C \circ \psi^{-1}$ es diferenciable. De manera análoga se prueba que $\psi \circ \varphi_C^{-1}$ es diferenciable. Por un razonamiento análogo se ve que toda carta $(U', \psi') \in \mathcal{F}_C$ compatible con (V, φ_C) es compatible con (V, φ_B) . Por último usando la maximalidad resulta $\mathcal{F}_B = \mathcal{F}_C$.

2.2. Ejemplos de variedades.

- (1) $M(n \times m, \mathbb{R})$ = conjunto de matrices reales $n \times m$. Es una variedad diferenciable de dimensión $n \times m$ por ser un espacio vectorial.
- (2) *Variedad abierta.* Sea $(M, \mathcal{F})$ una variedad y $U \subset M$ un subconjunto abierto. Entonces $(U, \mathcal{F}')$ es una variedad diferenciable de la misma dimensión que M , donde

$$\mathcal{F}' = \{(V \cap U, \varphi_{V \cap U}) : (V, \varphi) \in \mathcal{F}\}.$$

- (3) $Gl(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n \times n, \mathbb{R}) : \det(A) \neq 0\}$. Como el determinante es una función continua de las entradas de la matriz resulta $Gl(n, \mathbb{R})$ un subconjunto abierto de $M(n \times n, \mathbb{R})$ y por lo tanto una variedad abierta.
- (4) *Producto de variedades.* Sean $(M_1, \mathcal{F}_1), (M_2, \mathcal{F}_2)$ variedades. Sea $M = M_1 \times M_2$. Entonces

$$\mathcal{A} = \{(U_1 \times U_2, (\varphi_1, \varphi_2)) : (U_1, \varphi_1) \in \mathcal{F}_1, (U_2, \varphi_2) \in \mathcal{F}_2\}.$$

es un atlas en M como resulta fácilmente comprobable. Si $\dim M_1 = d_1$ y $\dim M_2 = d_2$, entonces se ve que M tiene dimensión $d_1 + d_2$. Observar que $\mathcal{A}$, no es un atlas maximal de M ya que hay otros sistemas coordenados en M que no son producto de sistemas coordenados. Replicando esta construcción se puede considerar el producto de una cantidad finita de variedades factores de igual manera. Por ejemplo $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$, el n -toro $\mathbb{T}^n = S^1 \times \cdots \times S^1$, n -veces, etc.

- (5) *La esfera S^n .* Vimos que sobre la esfera S^2 se puede definir un atlas C^∞ con seis sistemas coordenados. Este ejemplo se generaliza fácilmente a la esfera n -dimensional

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\|^2 = 1\}.$$

Fijamos en S^n la topología inducida de $\mathbb{R}^{n+1}$. Se definen los siguientes subconjuntos abiertos de S^n :

$$U_i^+ = \{x \in S^n : x_i > 0\}.$$

Análogamente U_i^- es el abierto de S^n donde $x_i < 0$.

Definimos ahora las funciones $\varphi_i^\pm : U_i^\pm \rightarrow \mathbb{R}^n$ dadas por:

$$\varphi_i^+(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_{n+1}),$$

donde el sombrero sobre x_i significa que la hemos removido. De manera análoga se define $\varphi_i^- : U_i^- \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Es fácil comprobar que $\varphi_i^\pm : U_i^\pm \rightarrow B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ son homeomorfismos que además son C^∞ -compatibles. En efecto, un cálculo directo permite obtener para $i < j$ la siguiente composición

$$\varphi_j^\pm \circ (\varphi_i^\pm)^{-1}(r_1, \dots, r_n) = (r_1, \dots, r_{i-1}, \widehat{r_i}, r_{i+1}, \dots, r_{j-1}, \pm \sqrt{1 - |r|^2}, r_{j+1}, \dots, r_n).$$

Para $j < i$ se obtiene una expresión similar. Obtenemos de esta manera un atlas C^∞ , $\mathcal{A} = \{(U_i^\pm, \varphi_i^\pm) : 1 \leq i \leq n+1\}$ que tiene $2(n+1)$ cartas. Finalmente la estructura diferenciable usual sobre S^n se obtiene completando $\mathcal{A}$ al único atlas maximal $\mathcal{F}$ que lo contiene.

- (6) *El espacio proyectivo real.* Es por definición el conjunto $\mathbb{RP}^n$ formado por todas las rectas de $\mathbb{R}^{n+1}$ que pasan por el origen. Cada punto de $\mathbb{RP}^n$ es una recta de $\mathbb{R}^{n+1}$, que contiene a $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Cualquier recta $\ell \in \mathbb{RP}^n$, está determinada por dos puntos $p, q \in \ell$, $p \neq q$. Por ejemplo ejemplo por los puntos $x, 0 \in \ell$, donde $x \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$.

Sea $\pi : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{RP}^n$ la aplicación que manda un punto $x \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ a la (única) recta ℓ tal que $x, 0 \in \ell$.

Definimos la siguiente relación de equivalencia en $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$: $x \sim x'$ si y sólo si $\pi(x) = \pi(x')$. Luego

$$x \sim x' \Leftrightarrow x' = \lambda x, \text{ para algun } \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Luego $x \sim x'$ sii x y x' determinan la misma recta. Sea $\pi(x) = [x]$, la clase de equivalencia de x , i.e. $[x]$ es la recta ℓ que contiene a los puntos $x, 0$. Entonces para todo $x \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ se tiene que

$$\pi^{-1}(\pi(x)) = [x] \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Damos a $\mathbb{RP}^n$ la topología cociente determinada por π : un subconjunto $U \subset \mathbb{RP}^n$ es abierto si y sólo si $\pi^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ es abierto. Es fácil ver que con esta topología $\mathbb{RP}^n$ resulta T_2 y N_2 , por qué?

Sea $\tilde{U}_i \subset \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$, el conjunto de los x tales que $x_i \neq 0$, y sea $U_i = \pi(\tilde{U}_i)$. Entonces U_i es abierto en $\mathbb{RP}^n$ para $1 \leq i \leq n+1$. En efecto por lo visto arriba se verifica que

$$\pi^{-1}(U_i) = \{\pi^{-1}(\pi(x)) : x \in U_i\} = \{[x] : x \in \tilde{U}_i\} = \tilde{U}_i, \quad 1 \leq i \leq n+1.$$

Definimos $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$, por

$$\varphi_i([x]) = \left(\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i} \right)$$

Entonces φ_i está bien definido, porque sólo depende de la clase de x . Además φ_i resulta continuo porque $\varphi_i \circ \pi : \tilde{U}_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua. Por otra parte es fácil ver que la inversa de φ_i está dada por

$$\varphi_i^{-1}(r_1, \dots, r_n) = [r_1, r_2, \dots, r_{i-1}, 1, r_{i+1}, \dots, r_n],$$

que también es continua. Luego φ_i es un homeomorfismo local para cada $1 \leq i \leq n+1$. Luego $\mathbb{RP}^n$ es un espacio topológico localmente euclideo de dimensión n , que es T_2 y N_2 .

Por último tenemos que la colección $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) : 1 \leq i \leq n+1\}$ es un atlas C^∞ . Eso resulta de calcular para $i < j$,

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(r_1, \dots, r_n) = \left(\frac{r_1}{r_i}, \dots, \frac{r_{i-1}}{r_i}, \frac{r_{i+1}}{r_i}, \dots, \frac{r_{j-1}}{r_i}, \frac{1}{r_j}, \frac{r_{j+1}}{r_j}, \dots, \frac{r_n}{r_j} \right),$$

luego $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$ es C^∞ . Los detalles los dejamos como ejercicio.

3. FUNCIONES DIFERENCIABLES

Definición 3.1. Sea $(M, \mathcal{F})$ una variedad diferenciable de dimensión n , y sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ un mapa. Decimos que f es diferenciable o C^∞ si $f \circ \varphi^{-1}$, es C^∞ en el abierto $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$, para todo sistema coordinado $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$.

En la práctica es suficiente que la condición de la definición se satisfaga para cartas de un atlas (no necesariamente maximal) de M :

Lema 3.1. Sea $(M, \mathcal{F})$ una variedad diferenciable y sea $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in A\} \subset \mathcal{F}$, un atlas en M . Si $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ es C^∞ en el abierto $\varphi_\alpha(U_\alpha)$, para todo $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$, entonces f es C^∞ .

Demostración. Sea $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$ una carta cualquiera. Queremos ver que $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}^k$ es C^∞ . Es suficiente ver que $f \circ \varphi^{-1}$ es C^∞ en algún entorno abierto de cada punto $\varphi(p) \in \varphi(U)$, $p \in U$. Como los abiertos de $\mathcal{A}$ cubren M , existe $\alpha \in A$, tal que $p \in U_\alpha$. Luego

$$f \circ \varphi^{-1} = f \circ \varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\alpha \circ \varphi^{-1},$$

es C^∞ en un entorno abierto de $\varphi(p)$, porque $\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1}$ es C^∞ en $\varphi(U \cap U_\alpha)$ que es abierto y contiene a $\varphi(p)$. $\square$

Ejercicio 3.1. Probar que toda $f : M \rightarrow \mathbb{R}^k$, que es C^∞ , es continua.

La definición anterior se extiende para el caso de mapas entre variedades:

Definición 3.2. Sean $(M, \mathcal{F})$, $(N, \mathcal{F}')$ variedades diferenciables de dimensiones m y n respectivamente. Un mapa continuo $f : M \rightarrow N$, se dice que es diferenciable o C^∞ , si para todo par de sistemas coordinados $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$ y $(V, \psi) \in \mathcal{F}'$ se cumple que

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

es diferenciable.

Si $U \cap f^{-1}(V) = \emptyset$, la diferenciabilidad de $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$, queda asegurada por vacuidad.

Ejercicio 3.2. Sea $f : M \rightarrow N$ un mapa. Si cada $p \in M$ tiene un entorno abierto U tal que $f|_U : U \rightarrow N$ es C^∞ , entonces f es C^∞ .

El siguiente resultado es similar al del Lema 3.1 y su demostración queda como ejercicio:

Lema 3.2. Sean $(M, \mathcal{F})$, $(N, \mathcal{F}')$, variedades diferenciables y sean $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in A\} \subset \mathcal{F}$, $\mathcal{B} = \{(V_\beta, \psi_\beta) : \beta \in B\} \subset \mathcal{F}'$ sendos atlas. Sea $f : M \rightarrow N$ continua. Si $\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ es C^∞ en su dominio para todos α, β , entonces f es C^∞ .

Definición 3.3. Sea $U \subset M$ un subconjunto abierto. Se define

$$C^\infty(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es } C^\infty\}.$$

Ejercicio 3.3. Probar que $C^\infty(U)$ es un espacio vectorial real y es un anillo con el producto de funciones.

Ejercicio 3.4. Probar las siguientes afirmaciones:

- (1) Toda función constante, i.e. $f : M \rightarrow N$, tal que $f(p) = q_0$ para todo $p \in M$, es diferenciable.
- (2) Sea (U, φ) un sistema coordinado de una variedad M y sea $x_i = r_i \circ \varphi$ la i -ésima función coordinada de φ . Entonces cada $x_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable. En efecto, como $\varphi \circ \varphi^{-1}(r_1, \dots, r_n) = (r_1, \dots, r_n)$, resulta

$$x_i \circ \varphi^{-1}(r_1, \dots, r_n) = r_i$$

de donde sigue que cada x_i es diferenciable.

- (3) La inclusión $\iota : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ es diferenciable.

- (4) La proyección $\pi : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{RP}^n$ es diferenciable.
 (5) La función $f : S^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$ dada por $f = \pi \circ \iota$ es diferenciable.

Definición 3.4. Una aplicación $f : M \rightarrow N$ es un difeomorfismo si f es biyectiva, diferenciable y su inversa f^{-1} es también diferenciable.

Ejercicio 3.5.

- (1) Sea $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ la bola abierta de radio uno centrada en 0. Es fácil comprobar que la aplicación $f : B_1(0) \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que $f(x) = \frac{x}{1 - \|x\|^2}$ es un difeomorfismo.
 (2) Sea (U, φ) un sistema coordenado de M . Probar que $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ es un difeomorfismo.
 (3) Considerar las variedades $(\mathbb{R}, Id)$ y $(\mathbb{R}, \varphi(s) = s^3)$. Probar que $(\mathbb{R}, \mathcal{F})$, y $(\mathbb{R}, \mathcal{F}')$ son difeomorfismos.
 (4) Considerar la aplicación $F : S^1 \rightarrow S^1$ dada por $F(z) = e^{i\theta}z$, donde $\theta \neq 2k\pi$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Probar que F es un difeomorfismo.

4. VECTORES TANGENTES

Un vector $v = (v_1, \dots, v_n)$ tangente en un punto $p \in \mathbb{R}^n$ puede pensarse como un operador actuando sobre funciones diferenciables definidas en entornos de p . En efecto si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable (C^∞) en un abierto U tal que $p \in U$, entonces v asigna a f el valor $v(f)$ que es la derivada direccional de f en el punto p , en la dirección de v :

$$v(f) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(p + tv) = v_1 \frac{\partial f}{\partial r_1}(p) + \dots + v_n \frac{\partial f}{\partial r_n}(p).$$

Esta operación de v sobre funciones diferenciables satisface dos propiedades importantes:

- (1)
$$\begin{aligned} (a) \quad & v(\lambda f + g) = \lambda v(f) + v(g), \\ (b) \quad & v(f \cdot g) = v(f)g(p) + f(p)v(g), \end{aligned}$$

donde f, g son funciones diferenciables alrededor de p y $\lambda \in \mathbb{R}$.

La primera propiedad dice que v actúa linealmente y la segunda, que se conoce como regla de Leibniz, dice que v actúa como una *derivación*. Estas propiedades nos sirven para entender la definición de vector tangente en un punto de una variedad diferenciable.

Sea M una variedad diferenciable y sea $p \in M$. Se define el conjunto de funciones diferenciables en $p \in M$:

$$(2) \quad C^\infty(p) = \{f \in C^\infty(U) : U \text{ es un abierto que contiene a } p\}$$

Resulta fácil comprobar que este conjunto de funciones satisface las siguientes propiedades:

- (a) Dadas $f, g \in C^\infty(p)$, con $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $g : V \rightarrow \mathbb{R}$, donde U, V son abiertos con $p \in U \cap V$, entonces la suma $f + g : U \cap V \rightarrow \mathbb{R}$ está también en $C^\infty(p)$.
 (b) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $f \in C^\infty(p)$, resulta que $(\lambda f) \in C^\infty(p)$.
 (c) El producto $f \cdot g : U \cap V \rightarrow \mathbb{R}$ está también en $C^\infty(p)$.

Definición 4.1. Un vector tangente a la variedad M en el punto $p \in M$ es una aplicación $v : C^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface las propiedades (a) y (b) de (1). Es decir que v es $\mathbb{R}$ -lineal y es una derivación.

Como dijimos antes $v(f)$ se interpreta como la derivada direccional de f en p en la dirección de v .

Los vectores tangentes tienen las siguientes propiedades:

Lema 4.1. Sea M una variedad diferenciable, $p \in M$ y $v \in T_p M$. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- (a) Si $f \in C^\infty(p)$ es constante, $v(f) = 0$.
- (b) Si $f, g \in C^\infty(p)$ satisfacen $f(p) = g(p) = 0$, entonces $v(fg) = 0$.

Demostración. Si $f(q) = c$, para todo $q \in U$, donde U es un abierto que contiene a p , entonces podemos escribir $f = 1.c$, donde tomamos a 1 como función. Aplicando la propiedad (a), tenemos $v(f) = c.v(1)$. Por otra parte aplicando la propiedad (b) resulta

$$v(f) = v(f).1 + c.v(1) = v(f) + v(f),$$

de donde resulta $v(f) = 0$.

La segunda propiedad sigue de (b). □

Definición 4.2. Sea M una variedad diferenciable y $p \in M$ un punto arbitrario. El conjunto

$$T_p M = \{\text{vectores tangentes a } M \text{ en } p\}$$

se llama el espacio tangente a M en p .

Proposición 4.2. $T_p M$ es un espacio vectorial real con las operaciones

$$\begin{aligned} (u + v)(f) &= u(f) + v(f), & \text{suma} \\ (\lambda v)(f) &= \lambda v(f), & \text{producto por escalares,} \end{aligned}$$

donde $f \in C^\infty(p)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

Proposición 4.3. Sea (U, φ) un sistema coordenado con $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$ y sea $p \in U$. Entonces

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p : C^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p (f) = \left. \frac{\partial}{\partial r_i} \right|_{\varphi(p)} (f \circ \varphi^{-1})(r_1, \dots, r_n)$$

es un vector tangente en p .

La demostración de esta proposición queda como ejercicio. Hay que usar propiedades de la derivada direccional usual.

Definición 4.3. $\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p$ se llama i -ésimo vector tangente coordenado del sistema $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$.

Propiedades:

(1) Sea U un subconjunto abierto de M . Dado $p \in M$, hay una identificación natural $T_p U \equiv T_p M$. La demostración de este hecho la daremos mas adelante.

(2) Sea $x_i : U \rightarrow \mathbb{R}$, $x_i = r_i \circ \varphi$. Entonces $\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p x_j = \delta_{i,j}$. En efecto

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p x_j = \left. \frac{\partial}{\partial r_i} \right|_{\varphi(p)} x_j \circ \varphi^{-1} = \left. \frac{\partial}{\partial r_i} \right|_{\varphi(p)} r_j = \delta_{i,j}.$$

Hemos visto que $T_p M$ es un espacio vectorial real. Es posible determinar su dimensión?

Teorema 4.4. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y sea $p \in M$. Sea (U, φ) un sistema coordenado con $p \in U$. Si $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$, entonces $\{\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x_n} \right|_p\}$ es una base de $T_p M$.

Demostración. Primero veamos que el conjunto $\{\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p, 1 \leq i \leq n\} \subset T_p M$ es linealmente independiente. Recordemos que $\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p (x_j) = \delta_{i,j}$, de donde resulta

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p \right) (x_j) = \lambda_j.$$

Luego si $0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p$, entonces $\lambda_j = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p \right) (x_j) = 0(x_j) = 0$, para $j = 1, \dots, n$.

Veamos que todo vector $v \in T_p M$ es una combinación lineal de los $\frac{\partial}{\partial x_i}|_p$, para $i = 1, \dots, n$. Observar que si $v = \sum_{i=1}^n t_i \frac{\partial}{\partial x_i}|_p$, para ciertos escalares $t_1, \dots, t_n$, entonces $v(x_j) = t_j$, o sea $v = \sum_{i=1}^n v(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i}|_p$.

Sea $f \in C^\infty(p)$, definida en un abierto U con $p \in U$. Entonces en U tenemos $f = F \circ \varphi$ o sea

$$f = F(x_1, \dots, x_n),$$

donde $F = f \circ \varphi^{-1}$ es diferenciable y está definida en el abierto $\varphi(U)$ que contiene a $\varphi(p)$. Para lo que sigue podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\varphi(U)$ es una bola abierta de radio $\epsilon > 0$, centrada en $\varphi(p)$.

Dado $r = (r_1, \dots, r_n) \in \varphi(U)$ consideramos la curva

$$c(t) = F(t(r - \varphi(p)) + \varphi(p)), \quad t \in [0, 1].$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} c(1) &= c(0) + \int_0^1 c'(t) dt, \\ c(1) &= F(r), \\ c(0) &= F(\varphi(p)), \end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} F(r) &= F(\varphi(p)) + \int_0^1 \frac{d}{dt} F(t(r - \varphi(p)) + \varphi(p)) dt = \\ (3) \quad &F(\varphi(p)) + \int_0^1 \nabla F(t(r - \varphi(p)) + \varphi(p)) \cdot (r - \varphi(p)) dt = \\ &F(\varphi(p)) + \sum_{i=1}^n \left[\int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x_i}(t(r - \varphi(p)) + \varphi(p)) dt \right] (x_i - x_i(p)). \end{aligned}$$

Llamando $F_i(x) := \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x_i}(t(x - \varphi(p)) + \varphi(p)) dt$, resulta

$$F_i(\varphi(p)) = \frac{\partial F}{\partial x_i}(\varphi(p)) = \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{(\varphi(p))} (f \circ \varphi^{-1}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p (f).$$

Usando lo anterior podemos expresar $f = F(\varphi(p)) + \sum_{i=1}^n F_i(x)(x_i - x_i(p))$. De donde por linealidad, usando que v es una derivación de $C^\infty(p)$ y el Lema 4.1, resulta lo siguiente

$$\begin{aligned} v(f) &= v(F(\varphi(p))) + v(\sum_{i=1}^n F_i(x)(x_i - x_i(p))) = \\ &0 + \sum_{i=1}^n v(F_i)0 + F_i(\varphi(p)) \cdot v(x_i - x_i(p)) = \\ &0 + \sum_{i=1}^n v(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p. \end{aligned}$$

□

4.1. El espacio tangente de un espacio vectorial. Sea V un espacio vectorial real de dimensión n con su estructura diferenciable canónica (ver ejemplo 2.1) y sea $p \in V$ un punto. Entonces $T_p V$ se identifica naturalmente con V , i.e. hay un isomorfismo $F : V \rightarrow T_p V$ natural, que se puede definir sin usar bases. En efecto dado $v \in V$ definimos

$$F(v)(f) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(p + tv), \quad f \in C^\infty(p).$$

Entonces resultan las siguientes afirmaciones que quedan como ejercicios:

- (i) $F(v) \in T_p V$.
- (ii) F es un isomorfismo.
- (iii) $TV \equiv V \times V$.

5. LA DIFERENCIAL O DERIVADA

Sea M una variedad diferenciable y $U \subseteq M$ un subconjunto abierto. Dado $p \in U$ y una función suave $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ se define la diferencial de f en p de la siguiente manera

$$df_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}, \quad df_p(v) = v(f).$$

Entonces es inmediato que $df_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ resulta lineal. Luego df_p es un elemento del espacio dual $T_p^* M$.

La diferencial de una aplicación diferenciable entre dos variedades es una extensión de la noción anterior.

Definición 5.1. Sea $F : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable entre dos variedades y sea $p \in M$. Se define la diferencial o derivada de F en p , denotada por dF_p , de la siguiente manera

$$dF_p(v)(f) = v(f \circ F), \quad \forall f \in C^\infty(F(p)), \quad \forall v \in T_p M.$$

Afirmación: $dF_p(v) \in T_{F(p)} M$, para todo vector $v \in T_p M$:

Demostración de la afirmación: dadas $f, g \in C^\infty(F(p))$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$(1) \quad dF_p(v)(\lambda f + g) = v((\lambda f + g) \circ F) = v(\lambda(f \circ F) + (g \circ F)) = \lambda v(f \circ F) + v(g \circ F) =$$

$$\lambda dF_p(v)(f) + dF_p(v)(g).$$

$$(2) \quad dF_p(v)(fg) = v((fg) \circ F) = v((f \circ F)(g \circ F)) = v(f \circ F)g(F(p)) + f(F(p))v(g \circ F) =$$

$$dF_p(v)(f)g(F(p)) + f(F(p))dF_p(v)(g).$$

Luego $dF_p : v \mapsto dF_p(v)$ define una aplicación $dF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$. Veamos que es una transformación lineal:

Sean $u, v \in T_p M$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $f \in C^\infty(F(p))$, una función arbitraria. Entonces

$$\begin{aligned} dF_p(\lambda u + v)(f) &= (\lambda u + v)(f \circ F) = \lambda u(f \circ F) + v(f \circ F) = \\ &= \lambda dF_p(u)(f) + dF_p(v)(f) = (\lambda dF_p(u) + dF_p(v))(f). \end{aligned}$$

De donde resulta $dF_p(\lambda u + v) = \lambda dF_p(u) + dF_p(v)$.

Reunimos las propiedades básicas de la diferencial en el siguiente

Lema 5.1. Sean $F : M \rightarrow N$ y $G : N \rightarrow P$ aplicaciones diferenciables entre variedades y sea $p \in M$. Entonces

(a) $dF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)}$ es una transformación lineal.

(b) Regla de la Cadena: $d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p$.

(c) $dId_p : T_p M \rightarrow T_p M$ es la aplicación identidad $dId_p(v) = v$, $\forall v \in T_p M$.

(d) Si $F : M \rightarrow N$ es un difeomorfismo entonces $dF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ es un isomorfismo y además $(dF_p)^{-1} = dF_{F(p)}^{-1}$.

Demostración. Ya hemos demostrado la propiedad (a). Las propiedades (b), (c) y (d) quedan como ejercicio. Observar que la propiedad (d) es consecuencia de (b). $\square$

Proposición 5.2. Sea M una variedad diferenciable conexa y sea $F : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable tal que $dF_p = 0$ para todo $p \in M$. Entonces F es constante.

Demostración. Sea $q \in F(M)$. Entonces $F^{-1}(q) \subset M$ es cerrado y no vacío. Veamos que también es abierto. Sea $p \in F^{-1}(q)$ y sean $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$, $(V, \psi = (y_1, \dots, y_m))$ sistemas coordenados alrededor de p y de q respectivamente tales que $F(U) \subset V$. Entonces en U tenemos que

$$0 = dF\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial(y_j \circ F)}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

de donde resulta que

$$\frac{\partial(y_j \circ F)}{\partial x_i} = 0, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Esto dice que las funciones $y_j \circ F$, $1 \leq j \leq m$ son constantes en U , y por lo tanto $F(U) = q$. Luego $F^{-1}(q)$ es abierto en M y entonces $F^{-1}(q) = M$. $\square$

5.1. Cambios de coordenadas. Sean $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ y $(V, \psi = (y_1, \dots, y_n))$ sistemas coordenados en M con $p \in U \cap V$. Tenemos dos bases para $T_p M$: $\{\frac{\partial}{\partial x_i}|_p\}$ y $\{\frac{\partial}{\partial y_i}|_p\}$. Veamos como se expresa cada $\frac{\partial}{\partial y_j}|_p$ en términos de los $\{\frac{\partial}{\partial x_i}|_p\}$.

Existen escalares $a_{1,j}, \dots, a_{n,j}$ tales que $\frac{\partial}{\partial y_j}|_p = \sum_{k=1}^n a_{k,j} \frac{\partial}{\partial x_k}|_p$. Entonces esos escalares vienen dados por

$$\frac{\partial}{\partial y_j}|_p(x_i) = \sum_{k=1}^n a_{k,j} \frac{\partial}{\partial x_k}|_p(x_i) = \sum_{k=1}^n a_{k,j} \delta_{k,i} = a_{i,j}.$$

Luego

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_j}|_p &= \sum_{i=1}^n a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}|_p = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial y_j}|_p(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i}|_p = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial r_j}|_{\psi(p)}(x_i \circ \psi^{-1}) \right) \frac{\partial}{\partial x_i}|_p = \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial r_j}|_{\psi(p)}(r_i \circ (\varphi \circ \psi^{-1})) \right) \frac{\partial}{\partial x_i}|_p. \end{aligned}$$

de donde resulta que los coeficientes satisfacen

$$a_{i,j} = \frac{\partial}{\partial r_j}|_{\psi(p)}(r_i \circ (\varphi \circ \psi^{-1})),$$

con lo cual se ve que $A = (a_{ij})$ es la matriz Jacobiana de $\varphi \circ \psi^{-1}$ en $\psi(p)$.

Ejemplo 5.1. Coordenadas Polares. En $\mathbb{R}^2$ tenemos el sistema coordenado global $(\mathbb{R}^2, Id)$ y tambien otros que son C^∞ -compatibles con el. Por ejemplo el sistema de coordenadas polares.

Consideremos el abierto $U = \mathbb{R}^2 - \{(x, y) : x \geq 0, y = 0\}$, y sea $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación tal que $r_1 \circ \varphi = r, r_2 \circ \varphi = \theta$, i.e.

$$\varphi(p) = (r(p), \theta(p)),$$

donde $r = \|p\|$ y $\theta \in (0, 2\pi)$ es el ángulo que forma p con el eje x , (tomándolo positivo en sentido antihorario). Entonces $\varphi(U)$ es el rectángulo abierto

$$\mathcal{R} = \{(r, \theta) : 0 < r, 0 < \theta < 2\pi\},$$

Tenemos $Id : U \rightarrow U$ y $\varphi : U \rightarrow \mathcal{R}$. Las funciones de transición entre los dos sistemas son

$$\varphi^{-1} = Id \circ \varphi^{-1} : \mathcal{R} \rightarrow U, \quad \varphi = \varphi \circ Id^{-1} : U \rightarrow \mathcal{R},$$

donde $\varphi^{-1}(r, \theta) = Id \circ \varphi^{-1}(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$.

Luego

$$\begin{aligned} r_1 \circ (Id \circ \varphi^{-1}(r, \theta)) &= x_1 \circ \varphi^{-1}(r, \theta) = r \cos(\theta), \\ r_2 \circ (Id \circ \varphi^{-1}(r, \theta)) &= x_2 \circ \varphi^{-1}(r, \theta) = r \sin(\theta), \end{aligned}$$

donde r_1, r_2 son las funciones coordenadas usuales en $\mathbb{R}^2$ y $x_1 = r_1 \circ Id, x_2 = r_2 \circ Id$, son las funciones coordenadas de Id . Luego

$$x_1 \circ \varphi^{-1}(r, \theta) = r \cos(\theta), \quad x_2 \circ \varphi^{-1}(r, \theta) = r \sin(\theta).$$

En un punto $p \in U$ tenemos dos bases de $T_p U = T_p \mathbb{R}^2$:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x_2} \Big|_p \right\}, \quad \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial \theta} \Big|_p \right\}.$$

Procediendo como antes obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \Big|_p &= \frac{\partial}{\partial r} \Big|_p (x_1) \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p + \frac{\partial}{\partial r} \Big|_p (x_2) \frac{\partial}{\partial x_2} \Big|_p = \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \Big|_p (x_1 \circ \varphi^{-1}) \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p + \frac{\partial}{\partial r} \Big|_p (x_2 \circ \varphi^{-1}) \frac{\partial}{\partial x_2} \Big|_p = \\ &= \frac{\partial r \cos(\theta)}{\partial r} \Big|_{\varphi(p)} \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p + \frac{\partial r \sin(\theta)}{\partial r} \Big|_{\varphi(p)} \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p = \\ &= \cos(\theta(p)) \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p + \sin(\theta(p)) \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p. \end{aligned}$$

Análogamente

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \Big|_p = -r(p) \sin(\theta(p)) \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p + r(p) \cos(\theta(p)) \frac{\partial}{\partial x_2} \Big|_p.$$

Ejercicio 5.1. (i) Probar que $\varphi : U \rightarrow \mathcal{R}$ es un difeomorfismo.

(ii) Calcular $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}$ en términos de $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}$.

(iii) Analizar el cambio de coordenadas del sistema cartesiano al sistema de coordenadas esféricas en $\mathbb{R}^3$.

5.2. La diferencial en coordenadas. Dada una aplicación diferenciable $F : M \rightarrow N$ y un punto $p \in M$, la diferencial $dF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ satisface $dF_p(v)(f) = v(f \circ F)$ para todo vector $v \in T_p M$ y toda función suave $f \in C^\infty(F(p))$. Sean $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ y $(V, \psi = (y_1, \dots, y_m))$ sistemas coordenados alrededor de p y de $F(p)$ respectivamente. Calculemos la matrix de dF_p en las bases $\{\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p\}$ y $\{\frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_{F(p)}\}$.

Usando la definición de dF podemos escribir

$$dF_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right) = \sum_{j=1}^m \underbrace{\left(dF_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right) (y_j) \right)}_{A_{i,j}} \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_{F(p)}.$$

Donde

$$A_{i,j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p (y_j \circ F) = \frac{\partial}{\partial r_i} \Big|_{\varphi(p)} y_j \circ F \circ \varphi^{-1} = \frac{\partial}{\partial r_i} \Big|_{\varphi(p)} r_j \circ (\psi \circ F \circ \varphi^{-1}).$$

Con lo cual resulta que $A = (A_{i,j})$ es la matriz Jacobiana de la expresión en coordenadas de $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ en el punto $\varphi(p)$.

Ejemplo 5.2. Dado un sistema coordenado $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ de M , sabemos que $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ es un difeomorfismo. Calculemos $d\varphi$. Sea $p \in U$ y $f \in C^\infty(\varphi(p))$, entonces tenemos

$$d\varphi_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right) (f) = \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p (f \circ \varphi) = \frac{\partial}{\partial r_i} \Big|_{\varphi(p)} (f \circ \varphi \circ \varphi^{-1}) = \frac{\partial}{\partial r_i} \Big|_{\varphi(p)} (f).$$

En particular para $f = r_j$, la j -ésima función coordenada en $\mathbb{R}^n$,

$$d\varphi_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right) (r_j) = \delta_{i,j}.$$

de donde se obtiene que $d\varphi_p(\frac{\partial}{\partial x_i}|_p) = \frac{\partial}{\partial x_i}|_{\varphi(p)}$.

5.3. Vectores tangentes como velocidades de curvas. Una aplicación C^∞ , $\alpha : (a, b) \rightarrow M$, donde $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo abierto y M una variedad diferenciable se llama *curva diferenciable* o *suave* en M . El vector tangente a la curva en t es su velocidad instantánea y está dado por

$$\alpha'(t) = d\alpha\left(\frac{d}{dt}\Big|_t\right) \in T_{\alpha(t)}M, \quad t \in (a, b).$$

Si $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ es un sistema de coordenadas y $\alpha(t) \in U$ para $t \in (a', b') \subseteq (a, b)$ entonces en términos de las funciones coordenadas $\varphi \circ \alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t))$ tenemos

$$(4) \quad \alpha'(t) = d\alpha\left(\frac{d}{dt}\Big|_t\right) = \sum_{i=1}^n \alpha'_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{\alpha(t)}, \quad t \in (a', b').$$

Notar que esta expresión se parece mucho a la derivada de una curva en $\mathbb{R}^n$.

Es muy útil e intuitivo ver a los vectores tangentes a una variedad M en un punto cualquiera $p \in M$ como velocidades instantáneas de curvas en M que pasan por p .

Lema 5.3. Sea M una variedad diferenciable y $p \in M$. Todo vector $0 \neq v \in T_pM$ es la derivada de una curva suave en M que pasa por p .

Demostración. Sea $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ un sistema coordenado alrededor de $p \in U$. Componiendo φ con una traslación en $\mathbb{R}^n$ se puede suponer que $\varphi(p) = 0$, es decir que (U, φ) está *centrado* en p . Considerar la curva

$$c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M, \quad c(t) = \varphi^{-1}(tv_1, \dots, tv_n),$$

donde $v = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i}|_p$. Entonces $c(0) = \varphi^{-1}(0) = p$ y además como $\varphi \circ c(t) = (tv_1, \dots, tv_n)$, resulta usando (4) que $c'(0) = v$. Notar que la curva $c(t)$ es regular, i.e. $c'(t) \neq 0$ para todo t . $\square$

En general para poder obtener explícitamente la diferencial dF_p en la práctica conviene aplicarla a $v = \alpha'(0)$, donde $\alpha : (a, b) \rightarrow M$ es alguna curva suave con $\alpha(0) = p$. De esa manera como consecuencia de la regla de la cadena tenemos

$$dF_p(v)(f) = dF_p(\alpha'(0)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (F \circ \alpha)(t).$$

Por ejemplo en uno de los ejercicios del práctico se considera la aplicación determinante $\det : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ y se pide calcular la diferencial $(d\det)_I : T_I M(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, donde I es la matriz identidad. En este caso tener la matriz de esa transformación lineal no es útil.

6. EL FIBRADO TANGENTE

En los ejemplos de variedades que vimos hasta ahora habíamos partido de algún espacio topológico localmente euclideo y luego definimos una estructura diferenciable. El siguiente resultado es una herramienta útil para dotar de estructura de variedad a un conjunto del cual no sabemos a priori que sea un espacio topológico localmente euclideo, pero que viene equipado con una familia de subconjuntos distinguidos que están en biyección con abiertos de $\mathbb{R}^n$, los que servirán para definir la topología y la estructura diferenciable. El siguiente resultado formaliza esta idea y nos sirve para nuestros próximos ejemplos,

Lema 6.1. Sea M un conjunto (no vacío) y supongamos que existe una familia de subconjuntos $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ de M y mapas inyectivos $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$, que tienen las siguientes propiedades:

- (i) $M = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$, o sea que los miembros de la familia $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ cubren M .
- (ii) Para cada $\alpha \in A$, $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$.
- (iii) Para cada par $\alpha, \beta \in A$, $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ y $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ son subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$.
- (iv) Toda vez que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, la aplicación $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ es un difeomorfismo.

- (v) Hay una subfamilia numerable de $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ que cubre M .
 (vi) Dados dos puntos distintos cualquiera p, q de M entonces, o bien existe algún U_α que contiene a ambos, o bien hay dos conjuntos disjuntos U_α, U_β tales que $p \in U_\alpha$ y $q \in U_\beta$.

Entonces M tiene una única estructura de variedad diferenciable C^∞ de dimensión n tal que para cada $\alpha \in A$, $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ es un sistema coordenado.

Demostración. Recordemos primero la definición de base de una topología:

Decimos que una familia $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ es base de una topología de un conjunto X si:

- (i) Los miembros de $\mathcal{B}$ cubren X i.e. $\forall x \in X$, existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U$,
 (ii) Si $x \in U \cap V$, con $U, V \in \mathcal{B}$, entonces existe $W \in \mathcal{B}$, tal que $x \in W \subset U \cap V$.

Se define una topología τ en X declarando que un subconjunto $U \subset X$ es abierto, si para todo $x \in U$, existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U$ (en particular todo miembro de $\mathcal{B}$ está en τ). Dejamos como ejercicio verificar que τ es en efecto una topología en X y se llama la topología generada por $\mathcal{B}$. Por ejemplo la familia de los intervalos abiertos de $\mathbb{R}$ forman una base de la topología usual de $\mathbb{R}$.

Consideramos la siguiente familia $\sigma \subset \mathcal{P}(M)$:

$$\sigma = \{\varphi_\alpha^{-1}(V) : \alpha \in A, \text{ y } V \subset \varphi_\alpha(U_\alpha) \text{ es abierto}\}$$

Veamos que σ es base de una topología (la generada por σ). Dado $x \in M$, por (i) existe $\alpha \in A$ tal que $x \in U_\alpha$. Sea $V \subset \varphi_\alpha(U_\alpha)$ un abierto tal que $\varphi_\alpha(x) \in V$. Entonces $x \in \varphi_\alpha^{-1}(V)$. Luego σ cubre a M .

Por otra parte dados $\varphi_\alpha^{-1}(V)$ y $\varphi_\beta^{-1}(W)$ en σ tenemos por (iii) que $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(W)$ es un subconjunto abierto de $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ y por lo tanto abierto en $\varphi_\alpha(U_\alpha)$. Entonces el abierto

$$\varphi_\alpha^{-1}(V \cap (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(W))) = \varphi_\alpha^{-1}(V) \cap \varphi_\beta^{-1}(W),$$

es un miembro de σ conteniendo a x . Además notar que todo U_α es un abierto de la topología generada por σ y además $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha)$ resulta ser un homeomorfismo y por lo tanto M es localmente euclideo. Por (v) existe una subfamilia numerable $\{U_{\alpha_j} : j \in \mathbb{N}\} \subset \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ que cubre M . Cada abierto U_{α_j} tiene una base numerable de abiertos, luego la unión de todos esos abiertos es una base de la topología de M , luego M es N_2 . Además de (v) sigue que la topología de M es T_2 . Por último (iii) implica que $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in A\}$ es un atlas C^∞ en M . $\square$

6.1. El fibrado tangente. Dada una variedad diferenciable M , el fibrado tangente de M es la unión disjunta de todos los espacios tangentes $T_p M$, con $p \in M$:

$$TM = \cup_{p \in M} T_p M.$$

Un elemento de TM es un par (p, v) , donde $p \in M$ y $v \in T_p M$. Se define la proyección $\pi : TM \rightarrow M$, $\pi(p, v) = p$.

Vamos a equipar TM con una estructura de variedad C^∞ de dimensión $2n$, donde n es la dimensión de M .

Tomemos un sistema coordenado $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ en M y sea $\tilde{U} = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$. Consideremos la aplicación $\Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, dada por $\Phi = (x_1 \circ \pi, \dots, x_n \circ \pi, dx_1, \dots, dx_n)$, o sea

$$\Phi(p, v) = \Phi\left(\sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p\right) = (x_1(p), \dots, x_n(p), v_1, \dots, v_n), \quad p \in U, \quad v \in T_p M.$$

Entonces la imagen $\Phi(\pi^{-1}(U))$ es el conjunto $\tilde{U} \times \mathbb{R}^n$ que es abierto en $\mathbb{R}^{2n}$. Además $\Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow \tilde{U} \times \mathbb{R}^n$, resulta una biyección, porque su inversa está dada por

$$\Phi^{-1} : (x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n) \mapsto \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\varphi^{-1}(x)}.$$

Tenemos entonces un "sistema de coordenadas" local $(\pi^{-1}(U), \Phi)$ en TM , aunque todavía no hayamos definido una topología en TM .

Dos cartas $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n)), (V, \psi = (y_1, \dots, y_n))$ en M , tales que $U \cap V \neq \emptyset$ dan lugar a $(\pi^{-1}(U), \Phi), (\pi^{-1}(V), \Psi)$. Notemos que los conjuntos

$$\Psi(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)) = \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n, \quad \Phi(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)) = \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n,$$

son abiertos en $\mathbb{R}^{2n}$. Además la función de transición o cambio de coordenadas

$$\Psi \circ \Phi^{-1} : \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n,$$

es C^∞ como resulta de

$$\begin{aligned} \Psi \circ \Phi^{-1}(r_1, \dots, r_n, s_1, \dots, s_n) &= \\ \Psi(\varphi^{-1}(r), \sum_{i=1}^n s_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\varphi^{-1}(r)}) &= \\ (y_1 \circ \varphi^{-1}(r), \dots, y_n \circ \varphi^{-1}(r), \sum_{i=1}^n s_i \frac{\partial y_1}{\partial x_i} \Big|_{\varphi^{-1}(r)}, \dots, \sum_{i=1}^n s_i \frac{\partial y_n}{\partial x_i} \Big|_{\varphi^{-1}(r)}). \end{aligned}$$

Sea $\{(U_i, \varphi_i)\}$ una colección numerable de cartas coordenadas tal que $M = \cup U_i$ (como M es N_2 , es Lindelof, i.e. todo cubrimiento por abiertos tiene un subcubrimiento numerable). Entonces $\{\pi^{-1}(U_i)\}$ es un cubrimiento numerable de TM que satisface las condiciones del Lema 6.1. Finalmente TM resulta ser T_2 como es fácil de comprobar.

Ejercicio 6.1. Probar que la proyección $\pi : TM \rightarrow M$ es C^∞ y calcular su derivada.

7. PARTICIONES DE LA UNIDAD

Las particiones de la unidad son una herramienta útil para construir objetos globales en variedades a partir de objetos definidos localmente mediante las cartas coordenadas.

Dada una variedad diferenciable M y una función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, el soporte de f es el subconjunto de M definido como la clausura del conjunto de puntos en los cuales la función es no nula:

$$(5) \quad \text{sup}(f) = \overline{\{x \in M : f(x) \neq 0\}}.$$

Nos interesa construir funciones cuyos soportes están contenidos en subconjuntos abiertos de M . Primero estudiamos este problema para el caso $M = \mathbb{R}^n$.

Vamos a denotar por $C(r) \subset \mathbb{R}^n$ el cubo abierto centrado en 0, de semirradio $r > 0$, es decir $C(r) = (-r, r)^n$.

Lema 7.1. Existe una función suave $h : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ tal que $h(t) = 1$, para $t \leq 1$, $0 < h(t) < 1$, para $1 < t < 2$, y $h(t) = 0$ para $t \geq 2$.

Demostración. Consideramos primero la siguiente función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Claramente f es C^∞ en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Dejamos como ejercicio probar que todas las derivadas de f en $t = 0$ existen y satisfacen $f^{(k)}(0) = 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Sea ahora la función dada por

$$h(t) = \frac{f(2-t)}{f(2-t) + f(t-1)}.$$

El denominador es siempre positivo porque o bien $2 - t$, o $t - 1$ son positivos. Luego h es C^∞ . Además $h \geq 0$.

Por otra parte para $t \geq 2$, $h(t) = 0$, porque $f(2 - t) = 0$, mientras que para $t \leq 1$, $f(t - 1) = 0$, lo que implica $h(t) = 1$, para todo $t \leq 1$. Por último es fácil ver que $0 < h(t) < 1$, para $1 < t < 2$. $\square$

Lema 7.2. *Existe una función C^∞ , $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $H = 1$ en $\overline{B_1(0)}$ y $\text{sop}H = \overline{B_2(0)}$.*

Demostración. Definir $H(x) = h(|x|)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces H es C^∞ en $\mathbb{R}^n - \{0\}$, por ser composición de funciones suaves. Además $H = 1$ en $B_1(0)$, luego H es suave en $\mathbb{R}^n$. Por último $\text{sop}H = \overline{B_2(0)}$, como resulta de las propiedades de h . $\square$

Ejercicio 7.1. (a) Dados números reales $a < b$, construir una función C^∞ , $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $0 \leq h(t) \leq 1$, $\forall t$, y tal que $h(t) = 1$, para $t \leq a$, $h(t) = 0$, para $t \geq b$, y $0 < h(t) < 1$, para $a < t < b$.
(b) Dados $a < a' < b' < b$, construir una $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ tal que $0 \leq f(t) \leq 1$, $\forall t$, y que cumple que $f(t) = 1$, para $a' \leq t \leq b'$, y $\text{sop}(f) = [a, b]$.

Podemos preguntarnos si es posible replicar la construcción anterior de funciones C^∞ para el caso de una variedad diferenciable cualquiera.

Definición 7.1. Sea X un espacio topológico. Se dice que una familia $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ es localmente finita si cada $x \in X$ tiene un entorno que corta a lo sumo a una cantidad finita de miembros de $\mathcal{U}$.

Definición 7.2. Sea M una variedad diferenciable y sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in A\} \subset \mathcal{P}(M)$ una familia que cubre M . Una partición de la unidad subordinada a $\mathcal{U}$, es una colección de funciones $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ todas de clase C^∞ en M , que cumple:

- (i) $0 \leq f_\alpha(x) \leq 1$, para todo $x \in M$ y para todo $\alpha \in A$,
- (ii) $\text{sop}(f_\alpha) \subset U_\alpha$, para todo $\alpha \in A$,
- (iii) la familia $\{\text{sop}(f_\alpha) : \alpha \in A\} \subset \mathcal{P}(M)$ es localmente finita.
- (iv) $\sum_\alpha f_\alpha(x) = 1$, para todo $x \in M$ (observar que para cada $x \in M$ esta suma tiene sólo una cantidad finita de sumandos).

El siguiente teorema es muy importante y asegura la existencia de particiones de la unidad subordinada a un cubrimiento dado de una variedad. La demostración usa las funciones campana que construimos arriba para $\mathbb{R}^n$ y no la daremos acá.

Teorema 7.3. *Si M es una variedad diferenciable y $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ es un cubrimiento de M por abiertos, entonces existe una partición de la unidad subordinada a $\mathcal{U}$.*

Las consecuencias de este teorema son muy importantes. Algunas de ellas son las siguientes.

Proposición 7.4. *Sea M una variedad y sean A y B dos subconjuntos de M tales que A es cerrado, B es abierto y $A \subset B$. Entonces existe una función C^∞ , $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $0 \leq f(x) \leq 1$, para todo $x \in M$, y que además cumple $f(x) = 1$, para todo $x \in A$ y $\text{sop}(f) \subset B$.*

Demostración. Como A es cerrado, los subconjuntos B , $M - A$ forman un cubrimiento por abiertos de M . Luego existe una partición de la unidad subordinada a ese cubrimiento, i.e. existen $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ funciones C^∞ tales que $\text{sop}(f) \subset B$ y $\text{sop}(g) \subset M - A$, tales que $f(x) + g(x) = 1$, para todo $x \in M$. En particular para $x \in A$ tenemos que $g(x) = 0$, con lo cual resulta $f(x) = 1$, para todo $x \in A$, y $\text{sop}(f) \subset B$. Entonces f es la función buscada. $\square$

Corolario 7.5. *Toda variedad M admite una función C^∞ , no constante $f : M \rightarrow \mathbb{R}$.*

Lema 7.6. (Lema de extensión). *Sea M una variedad diferenciable y sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función C^∞ definida en un subconjunto cerrado $A \subset M$, i.e. f está definida en un abierto más grande V , que contiene a A y es C^∞ en V . Entonces para todo abierto U tal que $A \subset U$, existe una $\tilde{f} : M \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ , tal que $\tilde{f}|_A = f$, y $\text{sop}(\tilde{f}) \subset U$.*

Demostración. Sea V un abierto que contiene a A y tal que $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ es C^∞ , y sea U un subconjunto abierto cualquiera que contiene a A . Podemos suponer sin problema que $V \subset U$. Sea $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función C^∞ tal que $\text{sop}(\varphi) \subset V$ y tal que $\varphi \equiv 1$ en A . Definimos

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \varphi(x)f(x), & x \in V, \\ 0, & x \in M - \text{sop}(\varphi). \end{cases}$$

Entonces resulta que $\tilde{f} : M \rightarrow \mathbb{R}$ es C^∞ y extiende f , i.e. $\tilde{f} = f$ en A . $\square$

Ejercicio 7.2. Mostrar que la hipótesis de ser A cerrado en el Lema es necesaria. Es decir si A no es cerrado, el Lema puede dejar de cumplirse. Buscar ejemplos.

Dos consecuencias útiles del Lema de extensión son las siguientes:

Corolario 7.7. Sea M una variedad diferenciable, $p \in M$ y $v \in T_p M$. Si $f, g \in C^\infty(p)$ son dos funciones que coinciden en un entorno abierto de p , entonces $v(f) = v(g)$.

Demostración. Sea $h = f - g$, entonces por linealidad de v , es suficiente probar que $v(h) = 0$, si $h = 0$ en un entorno abierto V de p . Consideramos el cerrado $A = M - V \subset M - \{p\}$. Por el Lema de extensión, existe $u \in C^\infty(M)$ tal que $u = 1$ en A , y $\text{sop}(u) \subset M - \{p\}$.

Como $u = 1$ donde $h \neq 0$, resulta $hu = h$, por lo tanto $v(h) = v(hu)$. Además como $h(p) = u(p) = 0$, podemos aplicar el Lema 4.1 a h y u , con lo cual resulta $v(h) = 0$. $\square$

Corolario 7.8. Sea M una variedad diferenciable y $U \subset M$ un subconjunto abierto. Consideramos la aplicación inclusión $\iota : U \rightarrow M$, que es diferenciable. Entonces para todo $p \in U$, $d\iota_p : T_p U \rightarrow T_p M$ es un isomorfismo.

Demostración. Sabemos que U es una variedad abierta de M y por lo tanto tienen la misma dimensión $\dim(U) = \dim(M)$. Además como $d\iota_p$ es lineal, basta ver que es inyectiva. Sea $v \in T_p U$, tal que $d\iota_p(v) = 0$. Sea B un entorno abierto de p , tal que $\overline{B} \subset U$. Dada $f \in C^\infty(U)$, entonces por el Lema de extensión existe $\tilde{f} \in C^\infty(M)$ tal que $\tilde{f} = f$, en $\overline{B}$, y $\text{sop}(\tilde{f}) \subset U$. Entonces $\tilde{f}|_U$ y f son dos funciones en $C^\infty(U)$ que coinciden en B . Aplicando el Corolario anterior (ver la primera igualdad abajo) tenemos

$$v(f) = v(\tilde{f}|_U) = v(\tilde{f} \circ \iota) = d\iota_p(v)(\tilde{f}).$$

Luego como lo anterior se cumple para cualquier $f \in C^\infty(U)$, resulta $v = 0$, por qué?. $\square$

Nota: el isomorfismo anterior es canónico, es decir no depende de que bases tomemos.

8. SUBVARIEDADES

Definición 8.1. Sean M, N variedades diferenciables de dimension m y n respectivamente y sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable.

- (a) Se dice que el par (M, f) (o bien f) es una inmersión, si df_p es inyectiva para todo $p \in M$.
 (b) Una inmersión (M, f) (o bien f) se dice una subvariedad de N , si es una inmersión inyectiva, o sea $f : M \rightarrow N$ es inyectiva y df_p es inyectiva para todo $p \in M$.
 (c) (M, f) (o bien f) es una incrustación (o embedding) si f es una subvariedad de N , tal que $f : M \rightarrow f(M)$ es un homeomorfismo, donde $f(M)$ tiene la topología relativa de N .

Ejemplo 8.1. Veamos los siguientes ejemplos:

- (1) El ejemplo tipico de subvariedad es la inclusión $\iota : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\iota(x_1, \dots, x_m) \rightarrow (x_1, \dots, x_m, a_{m+1}, \dots, a_n).$$

Imaginamos a $\mathbb{R}^m$ dentro de $\mathbb{R}^n$ como una "rebanada" o "tajada" que está a una "altura" $a = (a_{m+1}, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n-m}$. En este caso $(\mathbb{R}^m, \iota)$ es además un embedding.

- (2) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$. Vemos que la imagen de f es una hélice. Entonces,
 (i) f es C^∞ ,
 (ii) f es una inmersión. Para ver eso calculamos

$$\begin{aligned} f'(t) &= df_t\left(\frac{d}{dt}\Big|_t\right) = \sum_{k=1}^3 \frac{d}{dr}\Big|_t (r_k \circ f) \frac{\partial}{\partial r_k}\Big|_{f(t)} = \\ &= -\sin(t) \frac{\partial}{\partial r_1}\Big|_{f(t)} + \cos(t) \frac{\partial}{\partial r_2}\Big|_{f(t)} + \frac{\partial}{\partial r_3}\Big|_{f(t)} \equiv (-\sin(t), \cos(t), 1). \end{aligned}$$

Luego $f'(t) = df_t(\frac{d}{dt}|_t) \neq (0, 0, 0), \forall t$.

Hemos usado que $\frac{\partial}{\partial r_k}|_p$ se identifica con el vector e_k .

Cualquier vector tangente $v \in T_t\mathbb{R}$ es de la forma $v = a \frac{d}{dt}|_t$, con $a \in \mathbb{R}$. Luego

$$df_t(v) = a df\left(\frac{d}{dt}\Big|_t\right) \equiv a(-\sin(t), \cos(t), 1).$$

En particular $df_t(v) = 0$ sii $a = 0$. Luego df_t es inyectiva para todo $t \in \mathbb{R}$. Con eso vemos que f es una inmersión.

Además $(\mathbb{R}, f)$ es subvariedad porque f es además inyectiva.

(iii) Veamos que f es un embedding, i.e. f es abierta:

Sea $(a, b) \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto. Entonces $f((a, b)) = f(\mathbb{R}) \cap U$, donde

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a < z < b\},$$

que es abierto en $\mathbb{R}^3$. Luego f es abierta y por lo tanto f es un embedding.

- (3) Consideremos la esfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, con la estructura diferenciable usual (recordar el atlas de seis cartas y completar al único atlas maximal que lo contiene, etc.) y sea $\iota : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la inclusión $\iota(x) = x$. Es fácil chequear que ι es C^∞ . Veamos que (S^2, ι) es un imbedding. Primero veamos que $d\iota_p$ es inyectiva para todo $p = (p_1, p_2, p_3) \in S^2$. Consideremos sólo el caso en que $p_3 > 0$, siendo los otros análogos. Entonces $p \in U_3^+$, donde (U_3^+, φ_3^+) es una carta de S^2 , con

$$\varphi_3^+(x, y, z) = (x, y), \quad (\varphi_3^+)^{-1}(r_1, r_2) = (r_1, r_2, +\sqrt{1 - r_1^2 - r_2^2}).$$

Notar que las funciones coordenadas de φ_3^+ son precisamente x, y , i.e. $\varphi_3^+(q) = (x(q), y(q)) = (q_1, q_2), \forall q \in U_3^+$.

Una forma de ver que $d\iota_p : T_p S^2 \rightarrow T_{\iota(p)} \mathbb{R}^3$ es inyectiva, es comprobar que lleva una base de $T_p S^2$ en un conjunto linealmente independiente de $T_p \mathbb{R}^3$. Recordemos de lo visto antes que

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p \right\} \subset T_p S^2,$$

es una base. Además

$$d\iota_p \left(\frac{\partial}{\partial x} \Big|_p \right) = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{\varphi_3^+(p)} (r_k \circ \iota \circ (\varphi_3^+)^{-1}) \frac{\partial}{\partial r_k} \Big|_{\iota(p)} \equiv (1, 0, \frac{-p_1}{\sqrt{1-p_1^2-p_2^2}}).$$

Notar que hemos usado la identificación $\frac{\partial}{\partial r_k} \Big|_p = e_k(p)$.

De la misma manera obtenemos (sin repetir las cuentas) que

$$d\iota_p \left(\frac{\partial}{\partial y} \Big|_p \right) \equiv (0, 1, \frac{-p_2}{\sqrt{1-p_1^2-p_2^2}}).$$

Luego la base $\{\frac{\partial}{\partial x} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p\}$ es llevada por $d\iota_p$ al conjunto de vectores linealmente independientes

$$(1, 0, \frac{-p_1}{\sqrt{1-p_1^2-p_2^2}}), \quad (0, 1, \frac{-p_2}{\sqrt{1-p_1^2-p_2^2}}).$$

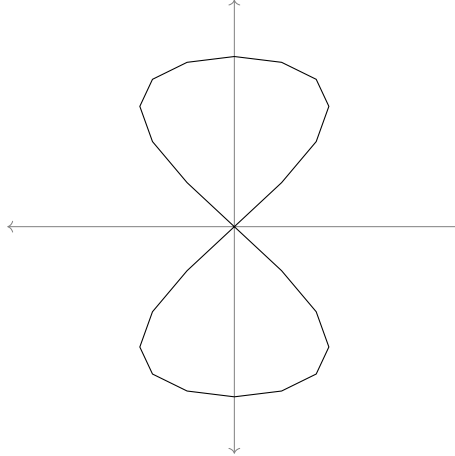
Las cuentas usando otros sistemas de coordenadas en S^2 son análogas. Luego (S^2, ι) es subvariedad. Por último veamos que $\iota : S^2 \rightarrow \iota(\mathbb{R}^3) \subset \mathbb{R}^3$ es abierta: como S^2 es compacta y $\iota(S^2)$ es T_2 con la topología relativa de $\mathbb{R}^3$, resulta $\iota : S^2 \rightarrow \iota(S^2)$ un homeomorfismo.

(4) A continuación veamos un ejemplo de subvariedad que no es embedding.

Consideremos la curva suave $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(t) = \sin(t)(\cos(t), 1) = \left(\frac{\sin(2t)}{2}, \sin(t) \right).$$

Su imagen es la *figura ocho* o Lemniscata de Bernouilli:



Lemniscata de Bernouilli o "figura ocho"

Entonces f es inmersión porque $f'(t) = (\cos(2t), \cos(t)) = (\cos^2(t) - \sin^2(2t), \cos(t)) \neq 0$, para todo t . Pero f no es subvariedad porque no es inyectiva: $f(0) = f(\pi) = f(2\pi) = 0$.

En vez de f consideremos su restricción al intervalo $(0, 2\pi)$: $g = f|_{(0, 2\pi)}$. Entonces $g : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una inmersión inyectiva, o sea es una subvariedad. Además se cumple que $Im(g) = Im(f)$, que es la figura ocho o lemniscata de Bernouilli. Es un ocho cuyo eje

vertical de simetría es el eje y y su eje horizontal de simetría es el eje x (ver figura de arriba).

Probemos que $g^{-1} : Im(g) \rightarrow (0, 2\pi)$ no es continua, donde en $Im(g)$ consideramos la topología inducida de $\mathbb{R}^2$. Basta encontrar una sucesión $\{a_n\} \subset Im(g)$ tal que $a_n \rightarrow a \in Im(g)$, pero tal que $g^{-1}(a_n) \not\rightarrow g^{-1}(a)$.

Tomamos $a_n = g(\frac{1}{n}) = \sin(\frac{1}{n})(\cos(\frac{1}{n}), 1)$. Entonces $g^{-1}(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) = g^{-1}(0, 0) = \pi$. Por otro lado $\lim_{n \rightarrow \infty} g^{-1}(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$. Luego g^{-1} no es continua y por lo tanto g no es abierta y por lo tanto no es embedding.

Si restringimos f al intervalo $(-\pi, \pi)$ obtenemos otra subvariedad $h = f|_{(-\pi, \pi)}$ tal que $Im(h) = Im(g)$, que tampoco es embedding. Para comprobarlo proceder de la misma manera a como lo hicimos con g .

Definición 8.2. Dos subvariedades $(M_1, f_1), (M_2, f_2)$ de N se dicen equivalentes, si existe un difeomorfismo $f : M_1 \rightarrow M_2$, tal que $f_2 \circ f = f_1$:

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{f_1} & N \\ & \searrow f & \uparrow f_2 \\ & & M_2 \end{array}$$

Notar que si (M_1, f_1) y (M_2, f_2) son equivalentes entonces se cumple $f_1(M_1) = f_2(M_2)$ y el difeomorfismo es $f = f_2^{-1} \circ f_1$.

Es fácil comprobar que ser variedades equivalentes es una relación de equivalencia en el conjunto de subvariedades de N .

Ejemplo 8.2. Recordemos del ejemplo "figura ocho" o lemniscata de Bernoulli que las subvariedades $g : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$, y $h : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ tienen por imagen el ocho: i.e. $Im(g) = Im(h) = \text{figura "ocho"}$. Recordemos que $g = f|_{(0, 2\pi)}$, $h = f|_{(-\pi, \pi)}$, entonces tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} (0, 2\pi) & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^2 \\ & \searrow f & \uparrow h \\ & & (-\pi, \pi) \end{array}$$

en donde $f = h^{-1} \circ g : (0, 2\pi) \rightarrow (-\pi, \pi)$. Queremos estudiar f . De la definición de h, g , resulta

$$\begin{aligned} h(t) &= g(t), \text{ para } 0 < t < \pi, \\ h(t - 2\pi) &= g(t), \text{ para } \pi < t < 2\pi. \end{aligned}$$

Entonces

$$(h^{-1} \circ g)(t) = \begin{cases} t, & \text{para } 0 < t < \pi, \\ t - 2\pi, & \text{para } \pi < t < 2\pi. \end{cases}$$

de donde resulta que $f = h^{-1} \circ g$ no es continua en $t = \pi$. Luego g, h no son subvariedades equivalentes.

Proposición 8.1. Sea N una variedad y sea $\mathcal{O}$ una clase de equivalencia de subvariedades de N . Entonces $\mathcal{O}$ tiene un único representante de la forma (A, ι) , donde $A \subset N$, tiene una estructura diferenciable tal que $\iota : A \hookrightarrow N$ es C^∞ , y $d\iota_p$ es inyectiva $\forall p \in A$.

Demostración. Sea $(M, f) \in \mathcal{O}$, (o sea $f : M \rightarrow N$ es una inmersión que es equivalente a todo otro miembro de $\mathcal{O}$) y sea $A = f(M)$, con la topología que hace de $f : M \rightarrow f(M)$ un homeomorfismo. Resulta fácil verificar que con esta topología $f(M)$ resulta localmente euclídea. Por otra parte toda carta (U, φ) de M , determina una carta $(f(U), \varphi \circ f^{-1})$ en $f(M)$. Dejamos como ejercicio verificar la compatibilidad entre estas cartas. Con esta estructura diferenciable resulta $f : M \rightarrow A$ un difeomorfismo y la inclusión $\iota : A = f(M) \rightarrow N$ resulta ser C^∞ , inyectiva y además $d\iota_p$, inyectiva para todo $p \in f(M)$. O sea (A, ι) es una subvariedad en la clase $\mathcal{O}$. $\square$

Nota 8.1. La estructura diferenciable en A dada en la demostración es la única estructura diferenciable en A tal que $\iota : A \rightarrow N$ es subvariedad. La unicidad es consecuencia del siguiente hecho más general: Si X es un espacio topológico localmente euclídeo que admite dos estructuras diferenciables $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$, entonces la identidad $Id : (X, \mathcal{F}_1) \rightarrow (X, \mathcal{F}_2)$ es un difeomorfismo si y sólo si $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$.

8.1. El teorema de la función inversa en variedades. Recordemos de Análisis Matemático III el siguiente resultado:

Teorema 8.2. Sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función C^∞ , con donde $U \subset \mathbb{R}^n$, es abierto y sea $p \in U$. Si df_p es 1-1 (por lo tanto df_p es un isomorfismo), entonces existe un entorno abierto V de p , tal que $f(V)$ es abierto y tal que $f|_V : V \rightarrow f(V)$ es un difeomorfismo.

Ejercicio 8.1. Sea $f : (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(r, \theta) = (r^5 + 3r^3 + r)(\cos(\theta), \sin(\theta))$. Sin calcular la inversa, probar que f es un difeomorfismo sobre su imagen $\mathbb{R}^2 - \{(x, 0) : x \geq 0\}$.

Ejemplo 8.3. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Entonces f es derivable en todo $\mathbb{R}$ y $f'(0) = 1$, sin embargo f no es inyectiva en ningún entorno abierto de $x = 0$. Cómo es posible? La clave es que f no es C^1 , i.e. f' no es continua.

Teorema 8.3. de la función inversa en variedades. Sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable entre variedades tal que $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ es un isomorfismo. Entonces existe un entorno abierto V de p , tal que $f(V)$ es abierto en N , y tal que $f|_V : V \rightarrow f(V)$ es un difeomorfismo.

La demostración es consecuencia directa del Teorema de la función inversa de Análisis III. Dejamos los detalles como ejercicio.

Para lo que sigue recordamos algunos resultados de algebra lineal.

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Recordamos que su espacio dual está definido por

$$V^* = \{\lambda : V \rightarrow \mathbb{R} : \lambda \text{ es lineal}\}$$

Si $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de V , se define $v^i \in V^*$ por

$$v^i(v_j) = \delta_{i,j}.$$

Resulta que $\{v^1, \dots, v^n\}$ es una base de V^* . En particular $\dim V^* = \dim V$.

Proposición 8.4. Sea M una variedad y sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, entonces $df_p \in T_p^* M$ es el funcional lineal definido por $df_p(v) = v(f)$, para todo $v \in T_p M$. Dado un sistema coordenado $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ con $p \in U$, entonces $\{(dx_1)|_p, \dots, (dx_n)|_p\} \subset T_p^* M$, es la base dual de la base de vectores coordenados $\{\frac{\partial}{\partial x_i}|_p; 1 \leq i \leq n\}$.

Demostración.

$$dx_i|_p \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_p = \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p x_i = \frac{\partial(x_i \circ \varphi^{-1})}{\partial r_j} \Big|_{\varphi(p)} = \frac{\partial r_i}{\partial r_j} \Big|_{\varphi(p)} = \delta_{i,j}.$$

□

Dada una base $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ de V^* , será dual de alguna base de V ? Una forma de responder la pregunta es recurrir al dual del dual: $(V^*)^*$. Se define

$$\phi : V \rightarrow (V^*)^*, \quad \phi(v)(\lambda) = \lambda(v), \quad v \in V, \quad \lambda \in V^*.$$

Entonces resulta que ϕ es un isomorfismo y no depende de ninguna elección de bases.

(Es suficiente ver que ϕ es inyectivo: si $\lambda(v) = 0 \forall v \in V$, en particular $\lambda(e_i) = 0$, $1 \leq i \leq n$, donde e_i es una base. Luego $\lambda = 0$.)

Sea $\{\lambda^1, \dots, \lambda^n\} \subset (V^*)^*$, la base dual de $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset V^*$. Aplicando el isomorfismo natural ϕ , tenemos n vectores $\{v_i = \phi^{-1}(\lambda^i)\}$. Es fácil probar que $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ es dual a la base $\{v_1, \dots, v_n\}$. Ejercicio.

Definición 8.3. Dada una transformación lineal $T : V \rightarrow W$, se define su dual

$$T^* : W^* \rightarrow V^*, \quad T^*(\xi) = \xi \circ T \in V^*, \quad \forall \xi \in W^*.$$

Proposición 8.5. Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal. Entonces

- (1) T es inyectiva $\Rightarrow T^*$ es sobreyectiva,
- (2) T es sobreyectiva $\Rightarrow T^*$ inyectiva,
- (3) T isomorfismo $\Leftrightarrow T^*$ isomorfismo.

Dejamos la demostración de la proposición como un ejercicio de algebra lineal.

Definición 8.4. Sea M una variedad diferenciable de dimensión m , y sea $p \in M$. Un conjunto de funciones $\{g_1, \dots, g_k\} \subset C^\infty(p)$, se dice independiente en p , si sus diferenciales $(dg_1)_p, \dots, (dg_k)_p$, forman un conjunto linealmente independiente de T_p^*M .

Ejemplo 8.4. Si $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ es un sistema coordenado entonces $\{(dx_1)_p, \dots, (dx_n)_p\}$ es independiente en p , por ser base de T_p^*M , i.e. es la base dual de $\{\frac{\partial}{\partial x_1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}|_p\}$.

Proposición 8.6. Sea M una variedad diferenciable con $\dim M = m$, y sean $\{y_1, \dots, y_m\}$ funciones C^∞ de un abierto U en $\mathbb{R}$, que son independientes en $p \in U$. Entonces existe un abierto $V \subseteq U$, con $p \in V$, tal que $(V, ((y_1)|_V, \dots, (y_m)|_V))$ es un sistema coordenado.

Demostración. Considerar la aplicación C^∞ $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ dada por $\varphi = (y_1, \dots, y_m)$. Hay que probar que φ es un difeomorfismo en un entorno abierto de p . Por hipótesis resulta que $d\varphi_p$ es un isomorfismo. Para eso miramos $d\varphi_p^*$:

$$d\varphi_p^*((dr_j)|_{\varphi(p)}) = (dr_j)|_{\varphi(p)} \circ d\varphi_p = d(r_j \circ \varphi)|_p = (dy_j)_p.$$

Luego $d\varphi_p^*$ lleva la base $\{(dr_j)|_{\varphi(p)}\}$ en la base $\{(dy_j)_p\}$ y por lo tanto $d\varphi_p^*$ es un isomorfismo, lo cual implica que $d\varphi_p$ es un isomorfismo. Luego por el teorema de la función inversa existe un entorno abierto V de p , tal que $\varphi(V)$ es abierto y tal que $\varphi|_V : V \rightarrow \varphi(V)$ es un difeomorfismo. En particular resulta que $(V, \varphi|_V)$ es un sistema coordenado. □

Proposición 8.7. Sea M variedad de dimensión m , y sea $U \subseteq M$ un subconjunto abierto. Si $\{y_1, \dots, y_k\} \subset C^\infty(U)$, con $k \geq m$, tales que el conjunto $\{(dy_1)_p, \dots, (dy_k)_p\} \subset T_p^*M$, genera T_p^*M , entonces existe un subconjunto $\{i_1, \dots, i_m\} \subset \{1, 2, \dots, k\}$ tal que $(V, ((y_{i_1})|_V, \dots, (y_{i_m})|_V))$ es un sistema coordenado en algun abierto $V \subseteq U$ con $p \in V$.

Demostración. Como $\{(dy_1)_p, \dots, (dy_k)_p\}$ genera T_p^*M , podemos extraer un subconjunto $\{(dy_{i_1})_p, \dots, (dy_{i_m})_p\} \subset \{(dy_1)_p, \dots, (dy_k)_p\}$ linealmente independiente y aplicamos la Proposición anterior. $\square$

Proposición 8.8. Sean M y N variedades de dimensiones m y n , respectivamente y sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación C^∞ . Dado $p \in M$, tal que $df_p : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$ es inyectiva, sea $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$, un sistema coordenado en un entorno abierto de $f(p)$. Entonces existe un subconjunto $\{i_1 < \dots < i_m\} \subset \{1, \dots, n\}$, tal que $\gamma = (x_{i_1} \circ f, \dots, x_{i_m} \circ f)$ es un sistema coordenado de M en cierto abierto que contiene a p .

Demostración. Como df_p es inyectiva resulta $df_p^* : T_{f(p)}^*N \rightarrow T_p^*M$ sobreyectiva. Por otra parte tenemos

$$d(x_i \circ f)_p = (dx_i)_{f(p)} \circ df_p = df_p^*((dx_i)_{f(p)}), \quad 1 \leq i \leq m.$$

Luego el conjunto $\{df_p^*((dx_1)_{f(p)}), \dots, df_p^*((dx_m)_{f(p)})\}$ genera T_p^*M . Entonces la afirmación sigue de la proposición anterior. $\square$

Definición 8.5. Decimos que una aplicación C^∞ , $f : M \rightarrow N$, se factoriza a traves de una subvariedad (P, g) de N , si la imagen de f cae dentro de la imagen de g : $f(M) \subset g(P)$. En este caso queda determinada una aplicación $f_0 : M \rightarrow P$ dada por $f_0 = g^{-1} \circ f$ y es la única tal que $g \circ f_0 = f$:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ & \searrow f_0 & \uparrow g \\ & & P \end{array}$$

Surge la pregunta siguiente: bajo qué condiciones f_0 es C^∞ ? No siempre, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 8.5. Recordemos las subvariedades $g : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$, y $h : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ que tienen por imagen la figura ocho: i.e. $Im(g) = Im(h) = \text{"ocho"}$.

Tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} (0, 2\pi) & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^2 \\ & \searrow f & \uparrow h \\ & & (-\pi, \pi) \end{array}$$

en donde $f = h^{-1} \circ g : (0, 2\pi) \rightarrow (-\pi, \pi)$.

Lema 8.9. de factorización. Sea $f : M \rightarrow N$, un mapa C^∞ , y sea (P, g) una subvariedad de N , tal que $f(M) \subset g(P)$.

(a) Si $f_0 = g^{-1} \circ f$ es continua, entonces es C^∞ .

(b) Si g es imbedding, entonces $f_0 = g^{-1} \circ f$ es C^∞ .

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{f} & N \\
 & \searrow f_0 & \uparrow g \\
 & & P
 \end{array}$$

Demostración. Sean $d = \dim P < n = \dim N$ y $m = \dim M$ y supongamos que $f_0 = g^{-1} \circ f$ es continua. Dado $q \in M$, queremos ver que f_0 es C^∞ en un entorno de q .

Sea $(V, \psi = (y_1, \dots, y_n))$ un sistema coordenado alrededor de $f(q)$ en N , y sea $p \in P$ tal que $f(q) = g(p)$. Como dg_p es inyectiva, existen $\{i_1, \dots, i_d\} \subset \{1, \dots, n\}$ y un entorno abierto U de p en P , tales que $(U, \tau = (y_{i_1} \circ g, \dots, y_{i_d} \circ g))$, es un sistema coordenado en P , alrededor de p .

Reordenando coordenadas podemos suponer que $i_1 = 1, \dots, i_d = d$. Llamando $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ la proyección en las primeras n coordenadas tenemos que $\tau = \pi \circ \psi \circ g$.

Sea $W = f_0^{-1}(U)$. Entonces W es abierto en M por ser f_0 continua y además W contiene al punto q . Entonces

$$\tau \circ (f_0)|_W = \pi \circ \psi \circ g \circ (f_0)|_W = \pi \circ \psi \circ f|_W,$$

que es C^∞ en W por ser composición de funciones C^∞ y por lo tanto f_0 es C^∞ en W . Luego es posible cubrir M de abiertos donde f_0 es C^∞ , luego es C^∞ .

(b) Si g es embedding $g : P \rightarrow g(P)$ es un homeomorfismo, donde $g(P)$ tiene la topología relativa de N . En particular g es abierta, o sea g lleva abiertos de P en abiertos de $g(P)$. Luego g^{-1} es continua y por lo tanto $f_0 = g^{-1} \circ f$ es continua, y por el Lema resulta $f_0 = g^{-1} \circ f$, C^∞ . $\square$

Vimos que toda clase de equivalencia de subvariedades de N tiene un único representante de la forma (A, ι) , donde $A \subset N$ es un subconjunto de N con una topología (no necesariamente la inducida) y una estructura diferenciable tal que la inclusión $\iota : A \rightarrow N$ es una inmersión.

Sea (A, ι) una subvariedad de una variedad N , donde ι es la inclusión. Como ι es en particular continua, la topología de A , es posiblemente mas fina que la topología relativa, es decir que puede tener más abiertos. El ejemplo típico de esta situación es el "ocho": $A = g(0, 2\pi)$, con la topología "copiada" de $(0, 2\pi)$ mediante g . Entonces por ejemplo $g(\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2})$ es abierto en A , pero no es un abierto en el ocho.

Veamos que si A tiene una topología fija τ localmente euclidea T_2 y N_2 (no necesariamente la inducida de N), entonces existe a lo sumo una estructura diferenciable (puede no existir ninguna) en A tal que (A, ι) es subvariedad de N . Para demostrar esto supongamos que existen dos estructuras diferenciables $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ en A , ambas compatibles con τ . Tenemos el siguiente diagrama :

$$\begin{array}{ccc}
 (A, \mathcal{F}_1) & \xrightarrow{\iota} & M \\
 & \searrow Id & \uparrow \iota \\
 & & (A, \mathcal{F}_2)
 \end{array}$$

donde ι es la inclusión. Entonces como la topología en A es la misma, la identidad $Id : A \rightarrow A$ es claramente un homeomorfismo y en particular es continua. Luego por la Proposición 8.8 y su Corolario, resulta que $Id : (A, \mathcal{F}_1) \rightarrow (A, \mathcal{F}_2)$ es C^∞ . Intercambiando los roles de $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$, resulta que $Id : (A, \mathcal{F}_2) \rightarrow (A, \mathcal{F}_1)$ es C^∞ , de donde concluimos que $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$.

Ejemplo 8.6. Antes probamos que la inclusión $\iota : S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ es un embedding. Entonces la estructura diferenciable usual de S^2 es la única "compatible" con la topología relativa.

8.2. Rebanadas. Consideremos el cubo abierto, centrado en $0 \in \mathbb{R}^n$, de ancho 2ε :

$$C_n(\varepsilon) = \{(r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n : |r_i| < \varepsilon\} = (-\varepsilon, \varepsilon)^n,$$

y sea $a \in C_n(\varepsilon)$, tal que $a_1 = \dots = a_m = 0$. La tajada o rebanada de $C(\varepsilon)$ a la altura a es el subconjunto

$$R(a) = \{(r_1, \dots, r_n) \in C(\varepsilon) : r_i = a_i, m+1 \leq i \leq n\}$$

Definición 8.6. Sea M una variedad y $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ un sistema coordenado cúbico en M , centrado en $p \in U$, i.e. $\varphi(U) = C_n(\varepsilon)$. Dado $a = (a_{m+1}, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n-m}$, con $|a_i| < \varepsilon$. La rebanada $R(a)$ de (U, φ) , a la altura a , es la preimagen por φ de la rebanada $\{r \in C_n(\varepsilon) : r_i = a_i, m+1 \leq i \leq n\}$:

$$R(a) = \varphi^{-1}(\{r \in C(\varepsilon) : r_i = a_i, m+1 \leq i \leq n\}) = \{q \in U : x_i(q) = a_i, m+1 \leq i \leq n\}.$$

Nota 8.2. Para todo $p \in M$, existe un sistema coordenado cúbico (U, φ) centrado en p . Por qué?

Ejemplo 8.7. El sistema de coordenadas polares. En el abierto $U = \mathbb{R}^2 - \{(x, y) : x \geq 0, y = 0\}$, sea $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$, el sistema de coordenadas polares tal que $r_1 \circ \varphi = r, r_2 \circ \varphi = \theta$, i.e.

$$\varphi(p) = (r(p), \theta(p)), \quad \forall p \in U,$$

donde $r = \|p\|$ y $\theta \in (0, 2\pi)$ es el ángulo que forma el vector p con el eje x , (tomandolo positivo en sentido antihorario). Se vé fácilmente que $\varphi(U) = \{(r, \theta) : 0 < r, 0 < \theta < 2\pi\}$, que es una franja abierta semi-infinita de ancho 2π . Sea $p_0 \in U$, $\varphi(p) = (r_0, \theta_0)$. Entonces para ε suficientemente chico,

$$V = \{p \in U : r_0 - \varepsilon < r(p) < r_0 + \varepsilon, \theta_0 - \varepsilon < \theta(p) < \theta_0 + \varepsilon\}$$

es un entorno cúbico de p_0 , con $V \subset U$. Las rebanadas de V son (segmentos de) rectas radiales y (partes de) círculos concéntricos.

La demostración de la siguiente proposición queda como ejercicio:

Proposición 8.10. $R(a)$ con la topología relativa tiene una estructura diferenciable tal que $(R(a), \iota)$ es subvariedad de U , y por lo tanto también de M .

Ejemplo 8.8. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función C^∞ . Entonces el gráfico $G(f)$ es una subvariedad de $\mathbb{R}^2$, por qué?. Queremos encontrar un sistema coordenado (U, φ) de $\mathbb{R}^2$ tal que $G(f)$ sea una rebanada. Definimos $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\varphi(s, t) = (x(s, t), y(s, t)) = (s, t - f(s)).$$

Entonces ver que $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es un difeomorfismo y que $G(f) = R(0)$.

Proposición 8.11. Sea $f : M \rightarrow N$ una inmersión, con $m = \dim M < n = \dim N$, y sea $p \in M$. Entonces existe un sistema de coordenadas cúbico (V, ψ) centrado en $f(p)$, y un entorno abierto U de p tal que $f|_U$ es inyectiva y $f(U)$ es la rebanada $R(0)$ de (V, ψ) . Además resulta que $(U, f|_U)$ es un embedding en N .

Demostración. Idea de la demostración tomada del libro de Warner. Existe una demostración mejor en el libro de Spivak que pronto daremos.

Sea $(V', \tau = (y_1, \dots, y_n))$ un sistema de coordenadas centrado en $f(p)$. Como df_p es inyectiva, por Proposición 8.8 existe un entorno abierto U' de p , y un subconjunto $\{i_1, \dots, i_m\} \subset \{1, \dots, n\}$, tales que $(U', \bar{\tau} = (y_{i_1} \circ f, \dots, y_{i_m} \circ f))$ es un sistema coordenado al rededor de p en M . Renumerando las coordenadas de τ de modo que $\{i_1, \dots, i_m\} = \{1, \dots, m\}$, podemos escribir

$$\bar{\tau} = (y_1 \circ f, \dots, y_m \circ f) = \pi \circ \tau \circ f,$$

donde $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es la proyección sobre las primeras m coordenadas.

Miramos a $\pi \circ \tau = (y_1, \dots, y_m) : V \rightarrow \mathbb{R}^m$. En el abierto $V'' := (\pi \circ \tau)^{-1}(\bar{\tau}(U')) \subset V' \subset N$, definimos funciones $x_1, \dots, x_n$:

$$\begin{cases} x_i = y_i, & 1 \leq i \leq m, \\ x_i = y_i - y_i \circ f \circ (\bar{\tau})^{-1} \circ \pi \circ \tau, & m+1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Afirmación: las funciones $x_1, \dots, x_n$ son independientes en $f(p)$: existen constantes a_{ij} , adecuadas tales que

$$\begin{cases} (dx_i)_{f(p)} = (dy_i)_{f(p)}, & 1 \leq i \leq m, \\ (dx_i)_{f(p)} = (dy_i)_{f(p)} + \sum_{j=1}^m a_{ij} (dy_j)_{f(p)}, & m+1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

De estas ecuaciones resulta que $\{dx_1, \dots, dx_n\}$ son independientes en $f(p)$. Luego por la Proposición 8.6, $x_1, \dots, x_n$ forman un sistema coordenado en un entorno abierto de $f(p)$. Sea V un entorno cúbico abierto de $f(p)$, donde $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$ es un sistema coordenado. Tomando $U = f^{-1}(V'') \cap U'$, resulta que $U, (V, \varphi)$ son el entorno y el s.c. requeridos. $\square$

Corolario 8.12. sobre la forma local de una inmersión. Si $f : M \rightarrow N$ es una inmersión y $p \in M$, entonces existen sistemas coordenados cúbicos $(U, \varphi), (V, \psi)$ centrados en p y $f(p)$, respectivamente, tales que

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(r_1, \dots, r_m) = (r_1, \dots, r_m, 0, \dots, 0),$$

(notar que $f(U)$ es una rebanada de (V, ψ)), i.e. toda inmersión es localmente una rebanada.

Demostración. Sea $p \in M$, y $(V, \psi = (y_1, \dots, y_n))$ el entorno cúbico centrado en $f(p)$ de la Proposición anterior, con $\psi : V \rightarrow C_n(\epsilon) \subset \mathbb{R}^n$, y sea U el entorno abierto de p en M tal que $f(U)$ es la rebanada $R(0)$ de V :

$$f(U) = \{f(q) \in V, q \in U : y_{m+1}(f(q)) = \dots = y_n(f(q)) = 0\}$$

Sea $\varphi = (y_1 \circ f, \dots, y_m \circ f) = \pi_m \circ \psi \circ f$. Entonces $\varphi(U) = C_m(\epsilon) \subset C_n(\epsilon)$, y $\varphi : U \subset C_m(\epsilon)$ es un difeomorfismo: se ve que su inversa está dada por

$$\varphi^{-1} = f^{-1} \circ \psi^{-1} \circ \iota_m : C_m(\epsilon) \rightarrow U,$$

donde $\iota_m : C_m(\epsilon) = \{(r_1, r_2, \dots, r_m, 0, \dots, 0)\} \hookrightarrow C_n(\epsilon)$, es la inclusión. De esto sigue que (U, φ) es un entorno coordenado cúbico centrado en p , tal que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ tiene la forma deseada. $\square$

Ejercicio 8.2. En general $f(U) \subset V \cap f(M)$, pero si f es embedding entonces es posible encontrar $(U, \varphi), (V, \psi)$ como arriba, tales que $f(U) = V \cap f(M)$.

Dar un ejemplo de una subvariedad no incrustada en donde $f(U) \subset V \cap f(M)$, pero no vale el igual.

8.3. Subvariedades definidas implícitamente. Dadas m ecuaciones con $n + m$ incógnitas

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) &= 0, \\ f_2(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) &= 0, \\ &\vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) &= 0, \end{aligned}$$

surge la pregunta: ¿Qué condiciones aseguran la posibilidad de "despejar" (no siempre significa hallar soluciones explícitas) por ejemplo las variables y 's en términos de las x 's?

$$\begin{aligned} y_1 &= g_1(x_1, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ y_m &= g_m(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

El siguiente resultado conocido como el teorema de la función implícita da una respuesta:

Teorema 8.13. Dada $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable, donde $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{n+m}$ es un subconjunto abierto. Sean $(x, y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ las coordenadas en $\mathbb{R}^{n+m}$. Asumiendo que en un punto $(x_0, y_0) \in \mathcal{O}$, se cumple

$$f(x_0, y_0) = 0,$$

y además que la matriz $n \times n$,

$$\left\{ \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x_0, y_0) \right\}_{1 \leq i, j \leq m},$$

es no-singular, entonces existen entornos abiertos $U \subset \mathbb{R}^n$ de x_0 , y $V \subset \mathbb{R}^m$ de y_0 , y una aplicación $g : U \rightarrow V$, C^∞ tales que $f(x, g(x)) = 0$, para todo $x \in U$, con $g(x_0) = y_0$.

El Teorema anterior se generaliza para variedades y adopta la siguiente forma:

Teorema 8.14. de la función implícita en variedades. Sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación C^∞ , con $m = \dim M > n = \dim N$. Dado $q_0 \in f(M)$, sea $P = f^{-1}(q_0) \subset M$. Si $df_p : T_p M \rightarrow T_{q_0} N$ es sobreyectiva para todo $p \in P$, entonces fijando la topología relativa en P , existe una única estructura diferenciable en P , tal que (P, ι) es un embedding en M . Además $\dim P = \dim M - \dim N$.

Para demostrar este teorema necesitamos antes establecer el siguiente resultado:

Proposición 8.15. Sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación C^∞ , y sea $p \in M$ tal que $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ es sobreyectiva ($m > n$). Sea $(V, \psi = (y_1, \dots, y_n))$, un sistema coordenado tal que $f(p) \in V$. Entonces las funciones $y_1 \circ f, \dots, y_n \circ f$ forman parte de un sistema coordenado en algún abierto $U \subset M$ entorno de p .

Demostración. Como df_p es sobreyectiva, su dual $df_p^* : T_{f(p)}^* N \rightarrow T_p^* M$ es inyectiva. Además tenemos que

$$df_p^*((dy_i)_p) = d(y_i \circ f)_p, \quad 1 \leq i \leq n,$$

de donde resulta que $\{(dy_1 \circ f)_p, \dots, (dy_n \circ f)_p\} \subset T_p^* M$, es un conjunto linealmente independiente.

Sea $(W, \eta = (x_1, \dots, x_m))$ un sistema coordenado cualquiera en M , alrededor de p . Entonces el conjunto

$$\{d(y_1 \circ f)_p, \dots, d(y_n \circ f)_p, (dx_1)_p, \dots, (dx_m)_p\}$$

genera a $T_p^* M$. Entonces es posible elegir $m - n$ funciones $\{x_{i_{n+1}}, \dots, x_{i_m}\} \subset \{x_1, \dots, x_m\}$, tales que

$$\{d(y_1 \circ f)_p, \dots, d(y_n \circ f)_p, (dx_{i_{n+1}})_p, \dots, (dx_{i_m})_p\}$$

es una base de $T_p^* M$. Luego por resultados anteriores resulta que $(y_1 \circ f, \dots, y_n \circ f, x_{i_{n+1}}, \dots, x_{i_m})$, es un sistema coordenado en algún entorno abierto U de p . $\square$

Demostración del Teorema 8.14: fijando la topología inducida en P , veamos que tiene una estructura de variedad diferenciable de dimensión $m - n$.

Sea $\psi = (y_1, \dots, y_n)$, un sistema coordenado centrado en $q_0 \in N$, definido en un entorno abierto de q_0 . Como $df_p : T_p M \rightarrow T_{q_0} N$ es sobreyectiva, por la proposición anterior existen funciones $x_{n+1}, \dots, x_m$, y un entorno abierto V de p tales que

$$(V, \varphi = (x_1 = y_1 \circ f, \dots, x_n = y_n \circ f, x_{n+1}, \dots, x_m))$$

es un sistema coordenado cúbico en M , centrado en p . Entonces se ve que $\psi \circ f = \pi \circ \varphi$, donde $\pi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, es la proyección sobre las n primeras coordenadas. Entonces para todo punto $p' \in P \cap V$ se cumple

$$x_i(p') = y_i(f(p')) = y_i(q_0) = 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Recíprocamente, si un $q \in V$ cumple $x_i(q) = 0$, $1 \leq i \leq n$, entonces $y_i(f(q)) = 0$, $1 \leq i \leq n$, con lo cual $\psi(f(q)) = 0$, de donde $f(q) = q_0$, por ser ψ inyectiva. Luego $q \in P$. O sea que

$$(6) \quad P \cap V = \{q \in V : x_1(q) = \cdots = x_n(q) = 0\}.$$

Luego para todo punto $p \in P$, existe un entorno coordenado cúbico $(V, \varphi = (x_1, \dots, x_m))$ en M centrado en p , tal que $P \cap V$ es una rebanada de V de dimensión $m - n$ dada por (6). En el abierto $V' = P \cap V$ definimos el sistema coordenado

$$\Phi = (x_{n+1}|_{V'}, \dots, x_m|_{V'}) = \pi_{m-n} \circ \varphi \circ \iota_{V'},$$

donde $\pi_{m-n} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$, es la proyección sobre las últimas $m - n$ coordenas y $\iota_{V'} : V' \hookrightarrow V$ es la inclusión. Veamos que estos sistemas coordenados cúbicos así construidos son C^∞ compatibles. Sean $(V', \Psi), (U', \Phi)$, sistemas coordenados con la propiedad del teorema y tales que: $U' \cap V' \neq \emptyset$. Entonces

$$\begin{aligned} \Phi \circ \Psi^{-1} &= (\pi_{m-n} \circ \varphi \circ \iota_{U'}) \circ (\pi_{m-n} \circ \psi \circ \iota_{V'})^{-1} = \\ &= \pi_{m-n} \circ \varphi \circ \psi^{-1} \circ \iota_{m-n} : \Psi(V' \cap U') \rightarrow \Phi(V' \cap U'), \end{aligned}$$

que es C^∞ pues $\varphi \circ \psi^{-1}$ ya lo era. Notar que

$$\pi_{m-n}|_{\{0\} \times \mathbb{R}^{m-n}} : \{0\} \times \mathbb{R}^{m-n} \rightarrow \mathbb{R}^{m-n}$$

tiene por inversa a la inclusión $\iota_{m-n} : \mathbb{R}^{m-n} \rightarrow \{0\} \times \mathbb{R}^{m-n}$. Además la imagen de $\psi^{-1} \circ \iota_{m-n}$ cae dentro de $V' \cap U'$, con lo cual $\iota_{U'} \circ (\iota_{V'})^{-1} = id$ en $V' \cap U'$.

Falta verificar que con esta estructura diferenciable que hemos definido en P la inclusión $\iota : P \rightarrow N$ es C^∞ : sea (V, φ) un entorno coordenado cúbico centrado en $p \in P$, y sea $(V' = V \cap P, \Phi)$ el correspondiente sistema coordenado. Entonces resulta

$$\varphi \circ \iota \circ \Phi^{-1}(t_1, \dots, t_{m-n}) = (0, \dots, 0, t_1, \dots, t_{m-n}),$$

luego ι es diferenciable. Por último la comprobación que $d\iota_p$ es inyectiva queda como ejercicio. $\square$

Ejercicio 8.3. Mostrar que el teorema de la función implícita usual es efectivamente un caso particular del teorema de la función implícita en variedades.

Ejemplo 8.9. Sea $P \subset N$ una subvariedad dada implícitamente y sea $f : M \rightarrow P$ una función, tal que $\iota \circ f : M \rightarrow N$ es C^∞ . Entonces $f : M \rightarrow P$ es C^∞ .

En efecto como P está incrustada, resulta f continua y por lo tanto C^∞ por el Lema de factorización.

Ejemplo 8.10. Sabíamos que $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, tiene una estructura diferenciable (con la topología relativa), tal que la inclusión es embedding. Vamos a probarlo usando el teorema anterior. Consideramos $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \|x\|^2$. Entonces $S^n = f^{-1}(\{1\})$.

Para aplicar el teorema sólo falta verificar que $df_p : T_p \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow T_1 \mathbb{R} = \mathbb{R}$, es sobreyectiva para todo $p \in S^n$.

$$\begin{aligned}
df_p(v) &= df_p\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} p + tv\right) = \\
&\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(p + tv) = \\
&\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \langle p + tv, p + tv \rangle = \\
\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\|p\|^2 + 2t\langle p, v \rangle + t^2\|v\|^2) &= 2\langle p, v \rangle.
\end{aligned}$$

Luego $df_p : T_p\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, no manda todo al cero. En efecto, observar por ejemplo que $df_p(p) = 2\|p\|^2 > 0$, para todo $p \neq 0$. Luego df_p es sobreyectiva para todo $p \in S^n$.

Ejercicio 8.4. Sea $f : Gl(n, \mathbb{R}) \rightarrow V$ la función $f(A) = AA^t$, donde V es el espacio vectorial de las matrices simétricas $n \times n$. El conjunto $f^{-1}(I) = O(n)$, es el grupo ortogonal, con el producto de matrices.

Probar que $O(n)$ tiene una única estructura de variedad tal que $(O(n), \iota)$ es un embedding en $Gl(n, \mathbb{R})$ y calcular su dimensión.

8.4. Extensión de funciones. Considerar la inclusión

$$\iota : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \iota(x) = (x, 0), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Entonces $(\mathbb{R}, \iota)$ es un embedding en $\mathbb{R}^2$. Dada una función C^∞ , $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la extensión natural de g a $\mathbb{R}^2$, es $\tilde{g}(x, y) = g(x)$, o sea $\tilde{g} \circ \iota = g$. En particular $\tilde{g} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es C^∞ .

En general dada una subvariedad (M, f) de N y una función C^∞ , $g : M \rightarrow \mathbb{R}$, no siempre es posible encontrar una función C^∞ globalmente definida $\tilde{g} : N \rightarrow \mathbb{R}$, tal que extienda g , i.e. tal que $\tilde{g} \circ f = g$. Por ejemplo sea $M = (0, 1) \subset \mathbb{R}$, y sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{x(x-1)}$. Entonces no es posible extender f a una función C^∞ definida en todo $\mathbb{R}$. Sin embargo si (M, f) es un embedding y $f(M)$ es cerrada en N , entonces sí.

Proposición 8.16. *Extensión local de funciones.* Sea (M, f) una subvariedad de N . Sea $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función C^∞ . Entonces dado $p \in M$, existen un abierto $U \subset M$, $p \in U$, y un abierto $V \subset N$, tal que $f(U) \subset V$, y una función C^∞ , $\tilde{g} : V \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ que extiende a g , o sea $\tilde{g}(f(q)) = g(q)$, para todo $q \in U$.

Demostración. Podemos suponer que la inmersión es (M, ι) , donde $M \subset N$. Dado $p \in M$, existe un entorno coordenado cúbico $(V, \psi = (y_1, \dots, y_n))$ centrado en p , tal que $U = V \cap M$ es la rebanada $R(0)$ de V :

$$U = \{q \in V : y_{m+1}(q) = \dots = y_n(q) = 0\}$$

Sea $\pi : V \rightarrow U$ la proyección natural definida como sigue: si $\psi(q) = (r_1, \dots, r_n)$, entonces

$$\pi(q) = q', \quad \text{donde } \psi(q') = (r_1, \dots, r_m, 0, \dots, 0)$$

Entonces se ve que π es C^∞ . Definimos $\tilde{g} : V \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\tilde{g} = g \circ \pi.$$

Entonces $\tilde{g} : V \rightarrow \mathbb{R}$ es C^∞ y $\tilde{g}|_U = g|_U$. □

En general no es posible extender globalmente a una función suave definida sobre una subvariedad inmersa. Sino sólo localmente. En el práctico se estudian algunos casos.

Teorema 8.17. Sea N una variedad y (M, ι) una variedad incrustada (embedded), donde $\iota : M \rightarrow N$ es la inclusión y M es cerrada en N . Sea $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función C^∞ , entonces g admite una extensión a una función C^∞ , $\tilde{g} : N \rightarrow \mathbb{R}$, es decir, existe una $\tilde{g} : N \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ , tal que $\tilde{g}|_M = g$.

Demostración. Para cada $p \in M$, hay un entorno cúbico V_p , centrado en p , tal que $M \cap V_p$ es una sola rebanada de V_p (y no una unión de rebanadas). Extendemos la g localmente de la rebanada $V_p \cap M$ a una función C^∞ definida en el cubo V_p :

$$\tilde{g}_p : V_p \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{g}_p = g \circ \pi_p,$$

donde $\pi_p : V_p \rightarrow M \cap V_p$ es la proyección natural de V_p sobre la rebanada $M \cap V_p$. Luego $\tilde{g}_p$ es C^∞ . Tenemos entonces que $\mathcal{U} = \{V_p : p \in M\} \cup \{N - M\}$ es un cubrimiento abierto de N . Por lo tanto existe una partición de la unidad $\{\varphi_p\}$ subordinada a $\mathcal{U}$.

Tomamos la subfamilia $\{\varphi'_p\} \subset \{\varphi_p\}$, de las funciones que satisfacen

$$\text{sop}(\varphi'_p) \cap M \neq \emptyset, \quad \text{sop}(\varphi'_p) \subset V_p.$$

Definimos $\tilde{g} = \sum_p \varphi'_p \tilde{g}_p$. Entonces $\tilde{g} : M \rightarrow \mathbb{R}$ es C^∞ y $\tilde{g}|_M = g$. □

Ejercicio 8.5. Mostrar que el teorema anterior deja de ser verdadero si se quita la hipótesis que (M, ι) es embedding, o la hipótesis de ser M cerrada en N .

9. CAMPOS VECTORIALES

Recordemos que dada una variedad M , el fibrado tangente está definido por

$$TM = \{(p, v) : p \in M, v \in T_p M\},$$

y la proyección canónica es $\pi : TM \rightarrow M$, $\pi(p, v) = p$.

Definición 9.1. Sea M una variedad diferenciable y $U \subset M$ un subconjunto abierto. Un campo vectorial en U es una aplicación $X : U \rightarrow TM$, tal que $X(p) \in T_p M$, para todo $p \in U$. Se suele denotar $X(p) = X_p$.

Como TM es una variedad diferenciable, tiene sentido preguntarse cuando un campo X es diferenciable.

Definición 9.2. Sea $U \subseteq M$, un subconjunto abierto.

(i) $\chi(U) = \{\text{campos diferenciables en } U\}$.

(ii) Dado $X \in \chi(U)$ y $f \in C^\infty(U)$, se define la función

$$Xf : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad Xf : p \mapsto Xf(p) := X_p(f), \forall p \in U.$$

Ejercicio 9.1. Probar que X es diferenciable si y sólo si $\Phi \circ X \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \Phi(\pi^{-1}(U))$ es diferenciable para todo sistema coordenado (U, φ) en M .

Proposición 9.1. Sea X un campo vectorial continuo en M . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) $X : M \rightarrow TM$ es diferenciable,

(b) Sea $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$, un sistema coordenado cualquiera en M , y sean $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$, funciones tales que la restricción de X a U , se expresa $X_U = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Entonces $a_i \in C^\infty(U)$.

(c) Para todo abierto $V \subset M$, y para toda $f \in C^\infty(V)$, se cumple que $Xf \in C^\infty(V)$.

Demostración. Recordemos que cualquier sistema coordenado $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ en M , da lugar a un sistema coordenado $(\pi^{-1}(U), \Phi)$ en TM , donde

$$\Phi = (x_1 \circ \pi, \dots, x_n \circ \pi, dx_1, \dots, dx_n),$$

i.e. las funciones coordenadas de Φ son $x_i \circ \pi$ y dx_i , $1 \leq i \leq n$. En particular observemos que $dx_i : \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}$, es C^∞ , para $1 \leq i \leq n$, como sigue de:

$$dx_i \circ \Phi^{-1}(r_1, \dots, r_n, s_1, \dots, s_n) = dx_i(\varphi^{-1}(r_1, \dots, r_n), \sum_{j=1}^n s_j \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_{\varphi^{-1}(r_1, \dots, r_n)}) = s_i.$$

Si X_U es la restricción de X a U , entonces

$$x_i \circ \pi(X_U) = x_i, \quad dx_i \circ X_U = X_U(x_i).$$

Por otra parte se ve que X es diferenciable si y sólo si $\Phi \circ X \circ \varphi^{-1}$ es diferenciable para todo sistema coordenado (U, φ) de M .

Probemos $(a) \Rightarrow (b)$: como X es diferenciable, su restricción X_U es diferenciable. Expresando $X_U = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, resulta que $a_i = dx_i \circ X_U = X_U(x_i)$, es C^∞ en (U) , por ser composición de funciones diferenciables.

$(b) \Rightarrow (c)$: Sea $f \in C^\infty(V)$ y sea $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ un sistema coordenado con $U \subseteq V$. Entonces

$$Xf|_U = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

luego $Xf|_U \in C^\infty(U)$. Como esto vale para todo s.c. tal que $U \subseteq V$, resulta $Xf \in C^\infty(V)$, para toda $f \in C^\infty(V)$.

(c) $\Rightarrow$ (a): para probar que el campo X es diferenciable, basta ver que su restricción $X|_U$ es diferenciable para todo sistema coordenado $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ en M . Tomamos el sistema $(\Phi, \pi^{-1}(U))$ en TM . Entonces recordar que

$$dx_i \circ X|_U = X x_i = a_i, \quad x_i \circ \pi \circ X|_U = x_i.$$

Luego las coordenadas de $X|_U$ son diferenciables en U . Como U es un entorno coordenado cualquiera, resulta X diferenciable en M . $\square$

Todo vector tangente en un punto es el valor de algún campo vectorial C^∞ :

Proposición 9.2. Sea $v \in T_p M$. Entonces existe $X \in \chi(M)$ tal que $X_p = v$.

Demostración. Sea $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ un sistema coordenado alrededor de p , y sea $v = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i} |_p$. Sea $f \in C^\infty(M)$ una función tal que $f(p) = 1$, y $\text{supp}(f) \subset U$. Entonces el campo definido por

$$X = \begin{cases} \sum_{i=1}^n f(q) v_i \frac{\partial}{\partial x_i} |_q, & q \in U, \\ 0, & q \notin U, \end{cases}$$

es C^∞ en M , y satisface $X_p = v$. $\square$

9.1. Curvas integrales.

Definición 9.3. Sea X un campo C^∞ en M . Una curva suave $\alpha : (a, b) \rightarrow M$ es una curva integral de X , si cumple

$$(7) \quad \alpha'(t) = d\alpha_t \left(\frac{d}{dr} \Big|_t \right) = X(\alpha(t)), \quad \forall t \in (a, b).$$

O sea α es curva integral de X si en cada punto $t \in (a, b)$, la velocidad instantánea de α en el instante t , está dada por el valor del campo X en $\alpha(t)$.

Ejemplo 9.1. (1) Sea $M = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, y sea $X = \frac{\partial}{\partial x}$. Dado $p = (p_1, p_2) \in M$, con $p_2 \neq 0$, entonces la curva integral de X , que pasa por p para $t = 0$ está dada por $\alpha(t) = (p_1 + t, p_2)$ y está definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Si en cambio tomamos por ejemplo $p = (-1, 0)$, la curva integral por p es $\alpha(t) = (t - 1, 0)$ que está definida en el intervalo $t < 1$.

(2) Sea $M = \mathbb{R}^2$, $X(x, y) = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}$. Entonces la curva integral de X que para $t = 0$ pasa por p , está dada por

$$\alpha(t) = (p_1 \cos(t) + p_2 \sin(t), -p_1 \sin(t) + p_2 \cos(t)).$$

En este ejemplo la curva integral por p , está definida para todo $t \in \mathbb{R}$, independientemente del punto p .

Cuál es la curva integral que pasa por $(0, 0)$?

(3) En la variedad cilindro de radio $r = 1$, $M = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, z \in \mathbb{R}\}$, sea el campo

$$X(x, y, z) = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}.$$

Entonces la curva integral α que en $t = 0$ pasa por $p = (p_1, p_2, p_3) \in M$ está dada por

$$\alpha(t) = (p_1 \cos(t) - p_2 \sin(t), p_1 \sin(t) + p_2 \cos(t), p_3 + t).$$

Independientemente de qué punto p tomemos, $\alpha(t)$ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$ y su imagen es una hélice de paso 1. Para $p = (1, 0, 0)$, coincide con la hélice del ejemplo visto en las subvariedades.

Sea $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ una curva integral de X . La ecuación diferencial de α es

$$x' = -y, \quad y' = x, \quad z' = 1.$$

Observar que M es un producto $S^1 \times \mathbb{R}$ y entonces la tercera ecuación diferencial está desacoplada de las otras dos y se resuelve independientemente. Las otras dos, se resuelven con el método autovalor-autovector.

La ecuación diferencial de curvas integrales del campo X en coordenadas se obtiene como sigue. Sea $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ un sistema coordenado tal que $p \in U$. Como el campo X es C^∞ en M , también lo es en U , luego

$$X_U = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \text{con } a_i \in C^\infty(U).$$

Sea $\alpha : (a, b) \rightarrow M$ una curva integral de X . Entonces para cada t tal que $\alpha(t) \in U$, tenemos

$$\alpha'(t) = d\alpha\left(\frac{d}{dr}\right)_t = \sum_{i=1}^n \frac{d(x_i \circ \alpha)}{dr} \Big|_{r=t} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\alpha(t)}.$$

Luego la ecuación diferencial (7) se escribe:

$$\sum_{i=1}^n \frac{d(x_i \circ \alpha)}{dr} \Big|_{r=t} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\alpha(t)} = \sum_{i=1}^n a_i(\alpha(t)) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\alpha(t)}.$$

Llamando $\alpha_i(t) = x_i \circ \alpha(t)$ a las funciones coordenadas, resulta que α es curva integral de X si y sólo si

$$\alpha'_i(t) = \frac{d\alpha_i}{dr} \Big|_{r=t} = a_i(\alpha(t)), \quad 1 \leq i \leq n.$$

O bien expresando α en coordenadas,

$$(8) \quad \alpha'_i(t) = \frac{d\alpha_i}{dr} \Big|_{r=t} = (a_i \circ \varphi^{-1})(\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)), \quad 1 \leq i \leq n, \quad t \in \alpha^{-1}(U),$$

se obtiene un sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias en un abierto de $\mathbb{R}^n$, de la forma

$$x' = F(x), \quad F_i(x_1, \dots, x_n) = a_i \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n,$$

donde $F = (F_1, \dots, F_n) : V \rightarrow \mathbb{R}^n$, es C^∞ en el abierto $V = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$.

Recíprocamente, si $c : (a, b) \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ es una curva solución del sistema $x' = F(x)$, donde $F_i = a_i \circ \varphi^{-1}$, entonces $\alpha = \varphi^{-1} \circ c$ es curva integral de X .

Notar que independientemente de que sistema coordenado tomemos alrededor de p vamos a obtener un sistema del tipo descrito arriba.

Un sistema autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias (ODE) como el anterior, es una ecuación de la forma

$$(9) \quad x' = F(x), \quad x'_i = F_i(x_1, \dots, x_n), \quad 1 \leq i \leq n.$$

donde $F : V \rightarrow \mathbb{R}^n$, es C^∞ en un abierto $V \subset \mathbb{R}^n$. Una solución (o curva solución) de la ecuación es una función suave $\gamma : (a, b) \rightarrow V$ tal que

$$\gamma'(t) = F(\gamma(t)), \quad \forall t \in (a, b).$$

El llamado *problema de Cauchy o de Valores iniciales* relativo a la ecuación diferencial o sistema $x' = F(x)$ se formula de la siguiente manera: fijados datos iniciales $t_0 \in \mathbb{R}, x_0 \in U$, hallar (si existe) una curva suave $\gamma : (a, b) \rightarrow V$, que sea solución de (9), tal que $t_0 \in (a, b)$, y tal que $\gamma(t_0) = x_0$. El problema de Cauchy puede no tener solución, o bien si la tiene puede no ser única. Cuando hay solución única, bajo ciertas condiciones, ésta dependerá de manera continua o diferenciable de los datos iniciales.

El siguiente resultado fundamental se estudia en la materia Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y su demostración puede encontrarse en varios libros sobre el tema.

Teorema 9.3. Sea $F : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función C^∞ , definida en un abierto $V \subseteq \mathbb{R}^n$.

(a) Existencia: dado $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times V$, el problema de valores iniciales

$$x' = F(x), \quad x(t_0) = x_0$$

posee una solución diferenciable $c : I \rightarrow V$ definida en cierto intervalo abierto I que contiene a t_0 .

(b) Unicidad: Si c_1 y c_2 son soluciones definidas en intervalos abiertos I_1, I_2 respectivamente que contienen a t_0 , entonces $c_1(t) = c_2(t)$, para todo $t \in I_1 \cap I_2$.

(c) Dependencia de los datos iniciales: dados $t_0 \in \mathbb{R}$, y $x_0 \in V$, existen $\varepsilon > 0$ y un abierto $V_0 \subset V$, con $x_0 \in V_0$, y una aplicación C^∞ , $\theta : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \times V_0 \rightarrow V$, tal que para cada $x \in V_0$, $\gamma_x : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \rightarrow V$, $\gamma_x(t) = \theta(t, x)$, es la única solución del problema de valores iniciales $u' = F(u)$, $u(t_0) = x$.

Para cada $x \in V_0$ la solución γ_x que pasa por x para $t = t_0$, está definida en el mismo intervalo $J_0 = (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, que le llamamos el intervalo uniforme de definición.

En particular tomando $t_0 = 0$, y $x_0 \in V$, existe un $\varepsilon > 0$, un abierto $V_0 \subset V$, con $x_0 \in V_0$, y una aplicación C^∞ , $\theta : (-\varepsilon, \varepsilon) \times V_0 \rightarrow V$, tal que para cada $q \in V_0$, la curva

$$J_0 = (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow V, \quad t \mapsto \theta(t, q) = \theta_t(q) = \gamma_q(t),$$

es la única solución que en $t = 0$, pasa por q .

Observación: del resultado anterior se obtiene la unicidad de curvas integrales de un campo en una variedad. Sean $\alpha : I_1 \rightarrow M$, $\beta : I_2 \rightarrow M$, curvas integrales de X tales que $\alpha(t_1) = \beta(t_2) = p$. Podemos suponer sin problema que $t_1 = t_2 \in I_1 \cap I_2$, considerando por ejemplo la curva integral $\tilde{\beta}(s) = \beta(s + (t_2 - t_1))$, definida en $I_2 - \{(t_2 - t_1)\}$. Sea (U, φ) un sistema coordenado al rededor de p , podemos suponer que las imágenes de las curvas $\varphi \circ \alpha : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi \circ \beta : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$, están contenidas en $\varphi(U)$. Además es fácil comprobar que estas curvas son ambas soluciones del problema de Cauchy $x' = F(x)$, $x(t_0) = x_0 = \varphi(p)$, con $t_0 = t_1 = t_2$. Luego por unicidad se tiene que $\varphi \circ \alpha(t) = \varphi \circ \beta(t)$, para todo $t \in I_1 \cap I_2$. De esto sigue que entonces $\alpha(t) = \beta(t)$, para todo $t \in I_1 \cap I_2$.

Aplicamos todo lo anterior para probar la existencia y unicidad de las curvas integrales maximales de un campo en una variedad.

Teorema 9.4. Sea M una variedad diferenciable y sea $X \in \chi(M)$. Entonces para cada $p \in M$ existen $a(p) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b(p) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ y una curva C^∞ , $\alpha_p : (a(p), b(p)) \rightarrow M$, tal que

(i) $0 \in (a(p), b(p))$, y $\alpha_p(0) = p$,

(ii) α_p es curva integral de X .

(iii) (maximalidad) Si $\sigma : (c, d) \rightarrow M$ es una curva suave que cumple $\sigma(0) = p$ y que es curva integral de X , entonces $(c, d) \subseteq (a(p), b(p))$ y $\sigma(t) = \alpha_p(t)$, para todo $t \in (c, d)$.

Luego α_p es la única curva que satisface (i), (ii) y (iii).

Demostración. Se define $(a(p), b(p))$ como la unión de todos los intervalos abiertos que contienen al 0, y que son dominios de curvas integrales de X que en $t = 0$ pasan por p . Veamos primero que $(a(p), b(p)) \neq \emptyset$. Tomando un sistema coordenado (U, φ) alrededor de p , la ecuación de una curva integral α de X cuando se escribe en las coordenadas de φ da lugar a un sistema de ecuaciones como en (8) al cual podemos aplicarle el Teorema 9.3. Entonces existe un $\varepsilon > 0$ y una curva o solución C^∞ , $\gamma_{x_0} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow V = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$, con $x_0 = \varphi(p)$. Luego $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$, dada por $\alpha(t) = \varphi^{-1} \circ \gamma_{x_0}(t)$ es una curva integral de X que en $t = 0$ vale p . Resulta de esto que $(a(p), b(p)) \neq \emptyset$. Como por definición $(a(p), b(p))$ es unión de intervalos abiertos, resulta que es un intervalo abierto.

Definimos $\alpha_p : (a(p), b(p)) \rightarrow M$, como sigue: dado $t \in (a(p), b(p))$, por definición t estará en algún intervalo (a, b) que contiene al cero y donde está definida una curva integral $\alpha : (a, b) \rightarrow M$ de X . Entonces se define $\alpha_p(t) = \alpha(t)$. Es buena esta definición? Si tenemos otra curva integral $\beta : (c, d) \rightarrow M$, tal que $0 \in (c, d)$ y $\beta(0) = p$, consideramos el conjunto $\mathcal{S} = \{s \in (a, b) \cap (c, d) : \alpha(s) = \beta(s)\}$. Veamos que $\mathcal{S} = (a, b) \cap (c, d)$ y por lo tanto $\alpha(s) = \beta(s)$, para todo $s \in \mathcal{S}$. En efecto, tenemos que $(a, b) \cap (c, d)$ es conexo pues es intersección de intervalos que contienen al cero. Entonces basta ver que $\mathcal{S}$ es abierto y cerrado en $(a, b) \cap (c, d)$. Por un lado $\mathcal{S}$ es cerrado pues es

donde coinciden dos funciones continuas. Además $\mathcal{S}$ es abierto, pues dado $s_0 \in \mathcal{S}$, tomamos un sistema coordenado alrededor del punto $\alpha(s_0) = \beta(s_0)$ y usamos unicidad de soluciones del sistema de ecuaciones de curvas integrales de X como hicimos antes (ver la observación anterior). Luego tendremos $\alpha|_W = \beta|_W$, para un intervalo abierto W tal que $s_0 \in W \subset (a, b) \cap (c, d)$. Luego $\mathcal{S}$ es abierto. Por último es inmediato de lo anterior que $\alpha_p : (a(p), b(p)) \rightarrow M$ es curva integral maximal de X . Hemos probado la existencia de la curva integral α_p C^∞ de X que pasa por p para $t = 0$ y que está bien definida en el intervalo maximal $(a(p), b(p))$, y que satisface (i), (ii) y (iii). Finalmente la unicidad de α_p resulta de su construcción. $\square$

Definición 9.4. Sea M una variedad diferenciable y sea $X \in \chi(M)$. Para cada $t \in \mathbb{R}$ se define el conjunto

$$D_t = \{p \in M : a(p) < t < b(p)\},$$

esto es, D_t está formado por todos los puntos p , tales que la (única) curva integral α_p de X que pasa por p , está definida en t . Se define la aplicación

$$\theta_t : D_t \rightarrow M, \quad \theta_t(p) = \theta(t, p) = \alpha_p(t).$$

Ejemplo 9.2. D_t puede ser vacío para algún t . Por ejemplo tomemos $M = (0, 3) \times (0, 3)$, y el campo $X = \frac{\partial}{\partial x}$. Se ve que $D_6 = \emptyset$. Además $D_1 = (0, 2) \times (0, 3)$, $D_{-2} = (2, 3) \times (0, 3)$, etc.

Teorema 9.5. Se cumplen las siguientes afirmaciones:

- (a) Uniformidad local del flujo: para todo $p \in M$ existen un entorno abierto V_0 de p y un $\epsilon > 0$ tales que la aplicación $\theta : (-\epsilon, \epsilon) \times V_0 \rightarrow M$, dada por $\theta(t, q) = \theta_t(p) = \alpha_q(t)$ es C^∞ , (siendo α_q la única curva integral de X , tal que $\alpha_q(0) = q$).
- (b) $D_t \subset M$ es abierto para todo t .
- (c) $\cup_{t>0} D_t = M$.
- (d) Dados $s, t \in \mathbb{R}$, entonces $\text{Dom}(\theta_t \circ \theta_s) \subset D_{t+s}$. Si s, t tienen el mismo signo entonces $\text{Dom}(\theta_t \circ \theta_s) = D_{t+s}$.
- (e) Para todo $q \in \text{Dom}(\theta_s \circ \theta_t)$, se cumple $(\theta_s \circ \theta_t)(q) = \theta_{s+t}(q)$.
- (f) $\theta_t : D_t \rightarrow D_{-t} = \theta_t(D_t)$ es un difeomorfismo y su inversa es θ_{-t} .

Demostración. (a) sigue de la dependencia diferenciable de la solución de los datos iniciales.

(c) Dado $p \in M$, α_p está definida en un intervalo abierto que contiene al cero. Luego existe $t > 0$ tal que $\alpha_p(t)$ está definida y por lo tanto $p \in D_t$, luego $M \subset \cup_{t>0} D_t$. Como todo $D_t \subset M$, resulta $M = \cup_{t>0} D_t$.

(d) Sean $p \in M$, y $t \in (a(p), b(p))$, $q = \alpha_p(t)$. Entonces $\sigma(s) = \alpha_p(t + s)$, es curva integral de X , que satisface $\sigma(0) = \alpha_p(t) = q$. Por unicidad, $\sigma(s) = \alpha_q(s)$, para todo $s \in (a(q), b(q))$, y queremos determinar este intervalo.

Sabemos que $\sigma(s) = \alpha_q(s)$ está definida para todo s en un intervalo posiblemente más grande o igual que $(a(p) - t, b(p) - t)$. Si ella estuviera definida en un intervalo estrictamente más grande que $(a(p) - t, b(p) - t)$, entonces α_p estaría definida en un intervalo estrictamente más grande que $(a(p), b(p))$, contradiciendo la maximalidad.

En conclusión para cada $t \in (a(p), b(p))$, y $q = \alpha_p(t)$, se cumple

$$(a(q), b(q)) = (a(p) - t, b(p) - t).$$

Observar que hemos probado que se cumple $\alpha_{\alpha_p(t)}(s) = \alpha_p(t + s)$, $\forall t \in (a(p), b(p))$, y $\forall s \in (a(\alpha_p(t)), b(\alpha_p(t))) = (a(p) - t, b(p) - t)$. Recordando que $\theta_t(q) = \alpha_q(t)$, lo de arriba se lee

$$(\theta_s \circ \theta_t)(p) = \theta_{s+t}(p).$$

En particular hemos probado que $\forall q \in \text{Dom}(\theta_s \circ \theta_t)$ vale $\theta_s \circ \theta_t(q) = \theta_{s+t}(q)$. Luego $\text{Dom}(\theta_s \circ \theta_t) \subset D_{t+s}$.

Supongamos que $s, t > 0$, y sea $p \in \text{Dom}(\theta_{t+s})$, luego $s + t \in (a(p), b(p))$. Como $s, t > 0$, tenemos que $0 < t < s + t$, además como $0 \in (a(p), b(p))$, resulta que $t \in (a(p), b(p))$. Por lo tanto está definida $\alpha_p(t) = \theta_t(p)$, o sea $p \in \text{Dom}(\theta_t)$. Queremos ver que $\theta_s(\theta_t(p))$ está definido. Pero $\alpha_{\alpha_p(t)}(s) = \theta_s(\theta_t(p))$ existe si $s \in (a(p) - t, b(p) - t) = (a(\alpha_p(t)), b(\alpha_p(t)))$, si y sólo si $s + t \in (a(p), b(p))$, lo cual vale por hipótesis. Luego $p \in \text{Dom}(\theta_s \circ \theta_t)$. La prueba para el caso $s, t < 0$ es análoga.

(b), para $t = 0$, $D_0 = M$. Sea $t > 0$ (el argumento para $t < 0$ es análogo). Dado $p \in D_t$, sea α_p la curva integral por p , la cual está definida en t . Aplicamos la propiedad (a) a cada punto del conjunto compacto $\alpha_p([0, t])$. Entonces existe un abierto W que contiene a $\alpha_p([0, t])$ y un $\epsilon > 0$ tal que

$$\theta : (-\epsilon, \epsilon) \times W \rightarrow M, \quad (t, q) \mapsto \theta(t, q) = \alpha_q(t),$$

es C^∞ . Sea $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande como para que $\frac{t}{n} \in (-\epsilon, \epsilon)$. Definir

$$f_1 = (\theta_{t/n})|_W, \quad W_1 = f_1^{-1}(W).$$

Luego para $j = 2, \dots, n$ se define inductivamente

$$f_j = (\theta_{t/n})|_{W_{j-1}}, \quad W_j = f_j^{-1}(W_{j-1}).$$

Entonces cada f_j es C^∞ en el abierto $W_{j-1} \subset W$. En particular W_n es abierto.

Por otra parte componiendo $\theta_{t/n}$ con sigo misma n -veces aplicada a p nos da

$$\theta_{t/n} \circ \dots \circ \theta_{t/n}(p) = \theta_t(p) \in W.$$

Luego

$$f_1^{-1}(\theta_t(p)) \in W_1, \quad f_2^{-1}(f_1^{-1}(\theta_t(p))) \in W_2, \dots$$

Por último

$$f_n^{-1}(f_{n-1}^{-1}(\dots f_2^{-1}(f_1^{-1}(\theta_t(p)))) \dots) = p \in W_n.$$

Por otra parte aplicando (d), resulta

$$f_1 \circ \dots \circ f_n|_{W_n} = (\theta_t)|_{W_n}.$$

Luego $W_n \subset D_t$ y por lo tanto D_t es abierto.

Veamos (f): es fácil ver que $\theta_t : D_t \rightarrow D_{-t}$ es biyectiva con inversa θ_{-t} : Primero observar que $\theta_t(D_t) \subset D_{-t}$. En efecto, dado $p \in D_t$, sea $q = \theta_t(p) = \alpha_p(t)$. Entonces $\alpha_q(s)$ está definida

$$\forall s \in (a(q), b(q)) = (a(p) - t, b(p) - t).$$

En particular $s = -t$, está en $(a(q), b(q)) = (a(p) - t, b(p) - t)$, dado que $0 \in (a(p) - t, b(p) - t)$. Luego $q \in D_{-t}$. Por aplicación de (d) resulta que $\theta_t \circ \theta_{-t} = \text{Id}$. Luego $\theta_t : D_t \rightarrow D_{-t}$ es biyectiva con inversa θ_{-t} . Por último en el transcurso de la prueba de (b) hemos probado que localmente θ_t es composición de aplicaciones C^∞ , de donde sigue que $\theta_t : D_t \rightarrow D_{-t}$ es un difeomorfismo. $\square$

Definición 9.5. $X \in \chi(M)$ se dice completo si $D_t = M$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Es decir X es completo si y sólo si $\alpha_p(t)$ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$ y para todo $p \in M$.

Ejemplo 9.3. Sea $X = \frac{\partial}{\partial r_1}$ en la variedad $M = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Entonces X no es completo.

Teorema 9.6. Sea $X \in \chi(M)$, tal que $\text{sop}(X) \subseteq M$ es un subconjunto compacto. Entonces X es completo.

Demostración. Ejercicio. $\square$

Cuando X es completo el flujo está definido en todo $\mathbb{R} \times M: \theta: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$, y satisface:

(i) $\theta_t: M \rightarrow M$ es un difeomorfismo $\forall t \in \mathbb{R}$.

(ii) $\theta_0 = Id_M$.

(iii) $\theta_s \circ \theta_t = \theta_{s+t}$, $\forall s, t \in \mathbb{R}$. En este caso tenemos un homomorfismo de grupos

$$\xi: (\mathbb{R}, +) \rightarrow (Diff(M), \circ), \quad t \mapsto \theta_t.$$

Definición 9.6. Una familia de difeomorfismos $\{\theta_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ de M , es un subgrupo monoparamétrico de difeomorfismos de M si satisface las propiedades (i), (ii), (iii) de arriba.

Dado un subgrupo monoparamétrico θ de difeomorfismos de M podemos definir un campo C^∞ en M por medio de

$$X_p(f) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\theta_t(p)), \quad f \in C^\infty(p).$$

Se verifica fácilmente que $X_p \in T_p M$, para todo $p \in M$. Veamos que X es un campo diferenciable en M . X se llama el *generador infinitesimal* del subgrupo monoparamétrico θ .

9.2. Extensión de un campo definido en una subvariedad. Así como en algunas situaciones nos interesa extender una función definida en una subvariedad, también uno puede preguntarse bajo que condiciones un campo definido en una subvariedad M de una variedad M puede extenderse a un campo definido en M . Por ejemplo no siempre se puede extender un campo C^∞ definido en un abierto. En efecto sea $X = \frac{1}{x(x-1)}e_1$, luego X es un campo suave definido en el intervalo $(0, 1)$ que no admite extensión a un abierto mas grande. Sin embargo X admite extensiones locales.

Teorema 9.7. Sea $f: M \rightarrow N$ una inmersión y $X \in \chi(M)$. Entonces dado $p \in M$ existen entornos coordenados U de p y V de $f(p)$ con $f(U) \subset V$ y un campo C^∞ Y en V tal que

$$Y_{f(q)} = df_q(X_q), \quad \forall q \in U,$$

o bien $(Y \circ f|_U) = df(X|_U)$.

Decimos que X tiene una extensión local C^∞ , Y en N .

Demostración. Por la forma local de una inmersión, existen entornos coordenados cúbicos $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_m))$, y $(V, \psi = (y_1, \dots, y_n))$ centrados en p , y $f(p)$, respectivamente tales que

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(r_1, \dots, r_m) = (r_1, \dots, r_m, 0, \dots, 0).$$

(en particular $f(U) \subset V$ es la rebanada $(r_1, \dots, r_m, 0, \dots, 0)$).

Por hipótesis podemos escribir $X_U = \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, con $a_i \in C^\infty(U)$. Sea $A_i: V \rightarrow \mathbb{R}$ una extensión C^∞ de a_i a todo V , es decir $A_i \circ f|_U = a_i$, para $1 \leq i \leq m$. Entonces $A_i = a_i \circ \pi$, donde $\pi: V \rightarrow f(U)$ es la proyección natural definida por

$$\pi(q) = q', \quad \text{donde } \psi(q') = (r_1, \dots, r_m, 0, \dots, 0), \quad \text{donde } \psi(q) = (r_1, \dots, r_n).$$

Definimos un campo en V mediante

$$Y = \sum_{i=1}^m A_i \frac{\partial}{\partial y_i}.$$

Veamos que $df(X) = Y$. Para eso usamos la forma local de f y calculamos

$$df_q\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)(y_j) = \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_q y_j \circ f = \left.\frac{\partial}{\partial r_i}\right|_{\varphi(q)} y_j \circ f \circ \varphi^{-1}.$$

De donde resulta $df_q(\frac{\partial}{\partial x_i}|_q) = \frac{\partial}{\partial y_i}|_{f(q)}$, para todo $q \in U$, para $1 \leq i \leq m$. Entonces para $q \in U$ resulta

$$\begin{aligned} df_q(X_q) &= df_q\left(\sum_{i=1}^m a_i(q) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_q\right) = \sum_{i=1}^m a_i(q) df_q\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_q\right) = \\ &= \sum_{i=1}^m (A_i \circ f)(q) \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_{f(q)} = Y(f(q)). \end{aligned}$$

□

En el práctico se estudiarán condiciones bajo las cuales es posible restringir un campo a una subvariedad.

9.3. El corchete de Lie. La noción de corchete de Lie de campos permite hablar entre otras cosas de cómo varía un campo respecto de otro campo. Dados dos campos $X, Y \in \chi(M)$, definimos su corchete de Lie $[X, Y]$, que resulta ser otro campo C^∞ en M .

Definición 9.7. Sean $X, Y \in \chi(M)$. Se define el corchete de Lie de X, Y por:

$$[X, Y]_p(f) = X_p(Yf) - Y_p(Xf), \quad p \in M.$$

Ejercicio 9.2. Probar que para todo $p \in M$, $[X, Y]_p \in T_p M$.

El corchete de Lie de campos C^∞ en M tiene las siguientes propiedades:

Proposición 9.8. Sean $X, Y, Z \in \chi(M)$, campos C^∞ arbitrarios. Entonces,

- (a) $[X, Y]$ es un campo C^∞ en M .
- (b) $[X, Y] = -[Y, X]$,
- (c) Si $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ es un sistema coordenado entonces $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$,
- (d) $\forall g \in C^\infty(M)$, se cumple $[X, gY] = g[X, Y] + XgY$.
- (e) $\forall f, g \in C^\infty(M)$, se cumple $[fX, gY] = fg[X, Y] + f.(Xg)Y - g(Yf)X$.
- (f) Identidad de Jacobi: $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$.

Demostración. (a) Dada $f \in C^\infty(V)$, con $V \subset M$ abierto, veamos que $[X, Y]f \in C^\infty(V)$: sabemos que $Xf, Yf \in C^\infty(V)$, luego $Y(Xf), X(Yf) \in C^\infty(V)$, de donde sigue que $[X, Y](f) \in C^\infty(V)$.

(b) es inmediata.

Para probar (c), usamos la definición. Dada $f \in C^\infty(U)$, observamos que $(\frac{\partial f}{\partial x_j} \circ \varphi^{-1})(r_1, \dots, r_n) = \frac{\partial}{\partial r_j}(f \circ \varphi^{-1})(r_1, \dots, r_n)$. Luego calculamos

$$[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}]f = \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial f}{\partial x_j}) - \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i}) =$$

$$\frac{\partial}{\partial r_i}(\frac{\partial f}{\partial x_j} \circ \varphi^{-1}) - \frac{\partial}{\partial r_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i} \circ \varphi^{-1}) =$$

$$\frac{\partial}{\partial r_i}(\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial r_j}) - \frac{\partial}{\partial r_j}(\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial r_i}) =$$

$$\frac{\partial^2(f \circ \varphi^{-1})}{\partial r_i \partial r_j} - \frac{\partial^2(f \circ \varphi^{-1})}{\partial r_j \partial r_i} = 0,$$

por la igualdad de las derivadas cruzadas.

La prueba de (d) y (f) quedan como ejercicio. Por último (e) es consecuencia de (d). □

Dada una aplicación $f : M \rightarrow N$, C^∞ y un campo $X \in \chi(M)$, en general no es cierto que $Y = df(X)$ sea un campo en N . De hecho Y ni siquiera puede estar bien definido. Por ejemplo si $f(q) = f(q') = p$, con $q \neq q'$, entonces los vectores $df_q(X_q), df_{q'}(X_{q'}) \in T_pN$, no tienen por qué coincidir.

Definición 9.8. Sea $F : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable y sean $X \in \chi(M), \tilde{X} \in \chi(N)$. Se dice que $X, \tilde{X}$ están F -relacionados si

$$\tilde{X} \circ F = dF \circ X, \quad \text{o sea } \tilde{X}_{F(q)} = dF_q(X_q), \quad \forall q \in M.$$

Nota: en particular si $X, \tilde{X}$ están F -relacionados, si y sólo si para toda $f \in C^\infty(N)$ se cumple

$$\tilde{X}f \circ F = X(f \circ F).$$

Ejemplo 9.4. Sea $f(t) = e^{it}$, $f : \mathbb{R} \rightarrow S^1$. Entonces los campos $\frac{\partial}{\partial r}$ y $X(x, y) = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$, $(x, y) \in S^1$, están f -relacionados.

Proposición 9.9. Sea $F : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable y sean $X, Y \in \chi(M), \tilde{X}, \tilde{Y} \in \chi(N)$, tales que $X, \tilde{X}$ y $Y, \tilde{Y}$ están F -relacionados. Entonces $[X, Y]$ está F -relacionado con $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$.

Corregir dem.

Demostración.

$$\begin{aligned} dF_p([X, Y]_p)(f) &= [X, Y]_p(f \circ F) = X_p(Y(f \circ F)) - Y_p(X(f \circ F)) = \\ &= X_p((dF \circ Y)(f)) - Y_p(dF \circ X)(f) = X_p(\tilde{Y}f \circ F) - Y_p(\tilde{X}f \circ F) = \\ &= dF(X_p)(\tilde{Y}f) - dF(Y_p)(\tilde{X}f) = \tilde{X}_{F(p)}(\tilde{Y}f) - \tilde{Y}_{F(p)}(\tilde{X}f) = [\tilde{X}, \tilde{Y}]_{F(p)}. \end{aligned}$$

O sea

$$dF \circ [X, Y] = [\tilde{X}, \tilde{Y}] \circ F.$$

□

El siguiente resultado es una de las aplicaciones del flujo de un campo. Previamente necesitamos el siguiente resultado

Proposición 9.10. Sea $\{V_1, \dots, V_k\} \subset T_pM$, un subconjunto linealmente independiente. Entonces existe un sistema coordenado $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ centrado en p tal que $V_i = \frac{\partial}{\partial x_i}|_p$, para $1 \leq i \leq k$.

Idea de la demostración. Completar $\{V_1, \dots, V_k\}$ a una base $\{V_1, \dots, V_n\}$ de T_pM , y tomar un sistema coordenado (U, ψ) , centrado en p . Sea T la transformación lineal que manda la base $\{d\psi_p(V_i)\}_{i=1}^n$ en la base canónica $\{e_1, \dots, e_n\}$, i.e. $T(d\psi_p(V_i)) = e_i, \forall i$. Entonces $\bar{\psi} = T \circ \psi = (x_1, \dots, x_n)$ es un sistema coordenado en U . Además

$$d\bar{\psi}_p(V_i) = dT(d\psi_p(V_i)) = T(\psi_p(V_i)) = e_i.$$

Como $d\bar{\psi}_p(\frac{\partial}{\partial x_i}|_p) = e_i$, resulta $\frac{\partial}{\partial x_i}|_p = V_i$, para $1 \leq i \leq n$. □

Proposición 9.11. (rectificación local de un campo) Sea $X \in \chi(M)$, y sea $p \in M$ tal que $X(p) \neq 0$. Entonces existe un sistema coordenado $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$, centrado en p tal que

$$X|_U = \frac{\partial}{\partial x_1}$$

Demostración. Por la proposición anterior existe un sistema coordenado $(V, \tau = (y_1, \dots, y_n))$, centrado en p , tal que $X(p) = \frac{\partial}{\partial y_1}|_p$.

Sea θ el flujo de X . Por la propiedad de uniformidad del flujo existe un $\epsilon > 0$, y un entorno $\tilde{V}$ de p , tal que $\theta : (-\epsilon, \epsilon) \times \tilde{V} \rightarrow M$ es C^∞ , y $(-\epsilon, \epsilon) \ni t \mapsto \theta_t(q)$ es la curva integral de X , que en $t = 0$ pasa por q , para todo $q \in \tilde{V}$. Podemos achicar V , si hace falta de manera que $V \subset \tilde{V}$.

En $\tau(V) \subset \mathbb{R}^n$ miramos la rebanada abierta W formada por los puntos de la forma $(0, r_2, \dots, r_n)$. Se define la siguiente aplicación

$$\sigma(t, r_2, \dots, r_n) = \theta_t(\tau^{-1}(0, r_2, \dots, r_n)),$$

la cual está bien definida y es C^∞ en $(-\epsilon, \epsilon) \times W$, y toma valores en M .

Comentario: la idea de la definición de σ , es la siguiente: como todo es local pensamos que estamos en un entorno abierto de $(0, \dots, 0)$ en $\mathbb{R}^n$. Por cada punto de la forma $(0, r_2, \dots, r_n)$, de ese entorno pasa una única curva integral del campo. Si q está en la curva integral que pasa por $(0, r_2, \dots, r_n)$, entonces las coordenadas de q , son $(t, r_2, \dots, r_n)$, donde t es el "tiempo" que tarda la curva para llegar hasta q .

De la definición de σ resulta $\sigma(0, \dots, 0) = p$. Veamos que $d\sigma_{(0, \dots, 0)}$ es inyectiva: En lo que sigue conviene tomar $t = r_1$, i.e. $\sigma(r_1, r_2, \dots, r_n) = \theta_{r_1}(\tau^{-1}(0, r_2, \dots, r_n))$. Sea $f \in C^\infty(p)$ arbitraria, entonces

$$\begin{aligned} d\sigma_0\left(\frac{\partial}{\partial r_1}\right)_0 f &= \frac{\partial}{\partial r_1}\bigg|_0 f \circ \sigma = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\sigma(h, 0, \dots, 0)) - f(\sigma(0, 0, \dots, 0))}{h} = \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\theta_h(\tau^{-1}(0, 0, \dots, 0))) - f(\tau^{-1}(0, 0, \dots, 0))}{h} &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(\theta_t(p)) = Xf(p) = \frac{\partial f}{\partial y_1}\bigg|_p. \end{aligned}$$

Luego $d\sigma_0(\frac{\partial}{\partial r_1})_0 = e_1$.

Por otra parte para $2 \leq j \leq n$, se tiene (donde h está en el lugar j):

$$\begin{aligned} d\sigma_0\left(\frac{\partial}{\partial r_j}\right)_0 f &= \frac{\partial}{\partial r_j}\bigg|_0 f \circ \sigma = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\sigma(0, 0, \dots, h, 0, \dots, 0)) - f(\sigma(0, 0, \dots, 0))}{h} = \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\tau^{-1}(0, 0, \dots, h, 0, \dots, 0)) - f(\tau^{-1}(0, 0, \dots, 0))}{h} &= \frac{\partial}{\partial r_j}\bigg|_{(0, \dots, 0)} f \circ \tau^{-1} = \frac{\partial f}{\partial y_j}\bigg|_p. \end{aligned}$$

De donde resulta $d\sigma_0(\frac{\partial}{\partial r_j})_0 = e_j$. Luego $(U, \varphi = \sigma^{-1})$ es un sistema coordenado de M , donde $U \subset V$ es un abierto, con $p \in U$. Veamos X_U tiene la propiedad que queremos.

Observamos que de la definición de σ , se obtiene la identidad

$$\begin{aligned} (*) \quad \sigma(r_1 + s, r_2, \dots, r_n) &= \varphi^{-1}(r_1 + s, r_2, \dots, r_n) = \\ \theta_{r_1+s}(\tau^{-1}(0, r_2, \dots, r_n)) &= \theta_s(\theta_{r_1}(\tau^{-1}(0, r_2, \dots, r_n))) = \theta_s(\varphi^{-1}(r_1, r_2, \dots, r_n)) = \\ &= \theta_s(\sigma(r_1, \dots, r_2)). \end{aligned}$$

Luego como $t \mapsto \theta_t(q)$ es curva integral de X satisface

$$\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \theta_{s+t}(q) = X(\theta_s(\theta_t(q))) = X(\theta_t(q)), \quad \forall t, \forall q.$$

Entonces

$$\begin{aligned} X(\sigma(r_1, r_2, \dots, r_n)) &= X(\theta_{r_1}(\tau^{-1}(0, r_2, \dots, r_n))) = \\ \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \theta_{s+r_1}(\tau^{-1}(0, r_2, \dots, r_n)) &= \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \sigma(s + r_1, \dots, r_n) = d\sigma\left(\frac{\partial}{\partial r_1}\bigg|_{(r_1, r_2, \dots, r_n)}\right). \end{aligned}$$

Llamando $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$, a las coordenadas resulta $X_U = \frac{\partial}{\partial x_1}$, que era lo que queríamos probar. $\square$

Proposición 9.12. $\forall X, Y \in \chi(M)$, y $\forall p \in M$, se cumple lo siguiente:

$$(10) \quad [X, Y](p) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} d\theta_{-t}(Y(\theta_t(p))) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d\theta_{-t}(Y(\theta_t(p))) - Y(p)}{t}$$

Para la demostración de (10) necesitamos establecer el siguiente resultado:

Lema 9.13. Sea $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow T_p M$, una curva suave. Entonces para toda $f \in C^\infty(p)$, se cumple

$$(11) \quad \gamma'(0)(f) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \gamma(t)(f),$$

donde $\gamma'(0) \in T_{\gamma(0)} T_p M \equiv T_p M$.

Demostración. Para probar la fórmula (11) tomamos un sistema coordenado $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ alrededor de p . Entonces existen funciones suaves $b_i(t)$, $1 \leq i \leq n$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, tales que $\gamma(t) = \sum_{i=1}^n b_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$. En principio $\gamma'(0) \in T_{\gamma(0)} T_p M$, pero via la identificación $T_p M \equiv T_{\gamma(0)} T_p M$, consideramos $\gamma'(0) \in T_p M$. Luego

$$(12) \quad \gamma'(0)f = \left(\sum_{i=1}^n b'_i(0) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right) f = \sum_{i=1}^n b'_i(0) \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_p = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \sum_{i=1}^n b_i(t) \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_p = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \gamma(t)(f).$$

□

Demostración. de la Proposición. Observar que $\theta_{-t}(\theta_t(p)) = p$, $\forall t$. Luego $d\theta_{-t} : T_{\theta_t(p)} M \rightarrow T_p M$, de donde resulta que $\gamma : t \mapsto d\theta_{-t}(Y(\theta_t(p)))$, es una curva suave en $T_p M$.

Ahora probaremos (10). Suponemos primero que $X_p \neq 0$. Entonces por la proposición anterior existe un sistema coordenado cúbico $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$, centrado en p tal que $X_U = \frac{\partial}{\partial x_1}$.

Por otra parte tenemos que $Y_{\theta_t(p)} = \sum_{i=1}^n b_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\theta_t(p)}$, para ciertos coeficientes suaves $b_i(t)$. Calculemos las coordenadas de ambos miembros de (10), según la base $\{\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\theta_t(p)}\}$. El lado izquierdo es por definición

$$\begin{aligned} [X, Y]_p(x_i) &= X_p(Yx_i) - Y_p(Xx_i) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} Yx_i(\theta_t(p)) - \\ &- \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} Y_{\theta_t(p)}(x_i) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left(\sum_{j=1}^n b_j(t) \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \right) (x_i) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} b_i(t) = b'_i(0). \end{aligned}$$

Notar que en la cuenta de arriba hemos usado el hecho que $X(x_i)$ es o bien 1, ó cero y por lo tanto $Y_p(Xx_i) = 0$.

En suma hemos probado que $[X, Y]_p(x_i) = b'_i(0)$, para $1 \leq i \leq n$.

Ahora calculemos el lado derecho de (10), aplicando (11) a la curva $\gamma(t) = d\theta_{-t}(Y(\theta_t(p)))$:

$$\begin{aligned} \gamma'(0)x_i &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (d\theta_{-t})_{\theta_t(p)} Y(\theta_t(p))(x_i) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} Y(\theta_t(p))(x_i \circ \theta_{-t}) = \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \sum_{j=1}^n b_j(t) \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_{\theta_t(p)} (x_i \circ \theta_{-t}) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \sum_{j=1}^n b_j(t) \left(\frac{\partial}{\partial r_j} \Big|_{\varphi(\theta_t(p))} x_i \circ \theta_{-t} \circ \varphi^{-1} \right) = \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} b_i(t) = b'_i(0). \end{aligned}$$

Para verificar la ultima igualdad usamos la identidad (*) de la prueba de la proposición 9.11 :

$$x_i \circ \theta_{-t} \circ \varphi^{-1}(u_1, \dots, u_n) = x_i(\varphi^{-1}(u_1 - t, u_2, \dots, u_n)) = \begin{cases} u_i, & i \neq 1, \\ u_1 - t, & i = 1. \end{cases}$$

Luego

$$\frac{\partial}{\partial r_j} \Big|_{\varphi(\theta_t(p))} x_i \circ \theta_{-t} \circ \varphi^{-1} = \frac{\partial}{\partial r_j} \Big|_{(t,0,\dots,0)} x_i \circ \varphi \circ \theta_{-t} = \delta_{i,j}.$$

Si $X_p = 0$, entonces se ve que $\theta_t(p) = p$, $\forall t$ (por qué?), y entonces $d\theta_{-t} : T_p M \rightarrow T_p M$. Consideramos la misma curva en $T_p M$, dada por

$$\gamma(t) = d\theta_{-t}(Y_{\theta_t(p)}) = d\theta_{-t}(Y_p),$$

a la que aplicamos (12):

$$\begin{aligned} \gamma'(0)f &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} d\theta_{-t}(Y_p)f = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} Y_p(f \circ \theta_{-t}) = \\ \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left(\sum_{i=1}^n Y_p(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right) (f \circ \theta_{-t}) &= \sum_{i=1}^n Y_p(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f \circ \theta_{-t}) = \\ \sum_{i=1}^n Y_p(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p (-Xf) &= -Y_p(Xf) = [X, Y]_p(f). \end{aligned}$$

□

Lema 9.14. (sobre la uniformidad conjunta para dos flujos) Sean $X, Y \in \chi(U)$, y sean θ, ϕ los flujos respectivos. Entonces para todo $p \in M$ existe un entorno abierto U de p y un $\delta > 0$ tal que $\theta_s \circ \phi_t$ y $\phi_s \circ \theta_t$ están definidos en U , para t, s tales que $|t| < \delta$, y $|s| < \delta$.

Demostración. Recordemos el teorema de existencia y unicidad de soluciones y dependencia de las condiciones iniciales de sistemas de EDO y sus consecuencias para la construcción y propiedades de los flujos de campos en variedades. Por la uniformidad de cada uno de los flujos sabemos que existen entornos abiertos V_0 y W_0 de p , y $\eta > 0$, $\epsilon > 0$, tales que

$$\theta : (-\eta, \eta) \times V_0 \rightarrow M, \quad \phi : (-\epsilon, \epsilon) \times W_0 \rightarrow M$$

están definidas y son C^∞ , en particular son continuas.

Recordemos de la definición: $t \mapsto \theta_t(q)$ es la única curva integral de X que en $t = 0$ pasa por q , lo mismo ϕ . Consideramos los conjuntos

$$A = \phi^{-1}(V_0) \subset (-\epsilon, \epsilon) \times W_0, \quad B = \theta^{-1}(W_0) \subset (-\eta, \eta) \times V_0.$$

Luego A, B son ambos entornos abiertos de $(0, p)$, y por lo tanto $A \cap B$ es entorno abierto de $(0, p)$. Entonces es posible encontrar un $\delta > 0$, con $\delta \leq \min(\eta, \epsilon)$ y un entorno abierto U de p tales que $(0, p) \in (-\delta, \delta) \times U \subset A \cap B$ (los rectángulos abiertos forman base de la topología producto).

Este $\delta > 0$ y el U cumplen lo que queremos: $\theta_t \circ \phi_s(q)$ está definido para todo $q \in U$ y para $|s|, |t| < \delta$: Como $(s, q) \in (-\delta, \delta) \times U \subset A \cap B$, resulta que

$$\phi_s(q) = \phi(s, q) \in \phi(A \cap B) \subset \phi(A) = V_0,$$

(que es el entorno abierto de p donde θ_t está definido). Luego $\theta_t(\phi_s(q))$ está definido para todo $|t| < \eta$ y por lo tanto para todo $|t| < \delta$. Razonando de forma análoga llegamos a la misma conclusión para $\phi_s \circ \theta_t$. □

Proposición 9.15. Sean $X, Y \in \chi(M)$, tales que $[X, Y] = 0$, y sean θ, ϕ los flujos de X e Y respectivamente. Dado $p \in M$, sean U, δ dados por el Lema de uniformidad conjunta. Entonces:

- (i) $d\theta_t \circ Y = Y \circ \theta_t$, en U , para todo $|t| < \delta$.
- (ii) $\theta_t \circ \phi_s = \phi_s \circ \theta_t$, en U , para todos s, t con $|s|, |t| < \delta$.

Demostración. Recordemos la fórmula (10): $[X, Y](p) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} d\theta_{-t}(Y(\theta_t(p)))$, $p \in M$. Notar que probar (i) equivale a que

$$Y_p = d\theta_{-t}(Y_{\theta_t(p)}), \quad \forall t, \forall p.$$

En otras palabras, para probar (i) debemos ver que para cada p , la curva $z(t) = d\theta_{-t}(Y_{\theta_t(p)})$, es constantemente igual a Y_p . Calculamos z' :

$$z'(s) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} z(t+s) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} d\theta_{-t-s}(Y_{\theta_{t+s}(p)}) =$$

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (d\theta_{-s})_{\theta_s(p)} d\theta_{-t}(Y_{\theta_t(\theta_s(p))}) =$$

$$(d\theta_{-s})_{\theta_s(p)} \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (d\theta_{-t})_{\theta_t(\theta_s(p))} \right) =$$

$$(d\theta_{-s})_{\theta_s(p)}([X, Y]_{\theta_s(p)}) = 0.$$

Luego $z'(s) = 0, \forall s$, de donde $z(s) = Y_p, \forall s$.

(ii) Dado $p \in U$ hay que probar que $\phi_s(p) = \theta_{-t} \circ \phi_s \circ \theta_t(p)$, para todo s . Es suficiente ver que el lado derecho es curva integral de Y , que para $s = 0$, pasa por p . Consideramos la curva $\sigma(s) = \theta_{-t} \circ \phi_s \circ \theta_t(p)$, entonces por un lado $\sigma(0) = \theta_{-t} \circ \phi_0 \circ \theta_t(p) = \theta_{-t} \circ \theta_t(p) = p$. Además aplicando la regla de la cadena y la propiedad (i), tenemos

$$\begin{aligned} \sigma'(s) &= (d\theta_{-t})_{\phi_s(\theta_t(p))} \left(\frac{d}{du} \Big|_{u=s} \phi_u(\theta_t(p)) \right) = \\ &= (d\theta_{-t})_{\phi_s(\theta_t(p))} Y_{\phi_s(\theta_t(p))} = Y_{\theta_{-t}(\phi_s(\theta_t(p)))} = Y_{\sigma(s)} \end{aligned}$$

de donde resulta lo que queríamos probar. □

La recíproca de la proposición anterior es válida:

Proposición 9.16. Sean $X, Y \in \chi(M)$, cuyos flujos conmutan. Entonces $[X, Y] = 0$.

Demostración. Es suficiente ver que la curva $t \mapsto d\theta_{-t}(Y_{\theta_t(p)})$, es constante para todo p . Sean θ, ϕ los flujos de X e Y , respectivamente y sean $p \in U, \delta > 0$ dados por el lema de la uniformidad conjunta de los flujos. Por hipótesis se cumple $\theta_t \circ \phi_s = \phi_s \circ \theta_t$, en U , para todos s, t , tales que $|s|, |t| < \delta$. Dado $q \in U$, y derivando obtenemos

$$\begin{aligned} d\theta_t(Y_q) &= d\theta_t \left(\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \phi_s(q) \right) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \theta_t(\phi_s(q)) = \\ &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \phi_s(\theta_t(q)) = Y_{\theta_t(q)}, \quad \forall q. \end{aligned}$$

Luego $d\theta_t \circ Y = Y \circ \theta_t$, para todo t . En particular $d\theta_{-t}(Y_{\theta_t(q)}) = Y_q$, para todo t , y para todo q . Luego la curva $\gamma(t) = d\theta_{-t}(Y_{\theta_t(q)})$, es constante lo que implica $[X, Y]_q = 0$, para todo $q \in U$. □

Una consecuencia de las dos proposiciones anteriores es el siguiente

Corolario 9.17. Sean $X, Y \in \chi(M)$, con flujos θ, ϕ , respectivamente. Entonces $\theta_t \circ \phi_s = \phi_s \circ \theta_t$, $\forall s, t \Leftrightarrow [X, Y] = 0$.

Habíamos visto que si $X \in \chi(M)$ es tal que $X(p) \neq 0$, entonces existe un sistema coordenado (U, φ) alrededor de p tal que $X|_U = \frac{\partial}{\partial x_1}$.

Si ahora tenemos dos campos $X, Y \in \chi(M)$ que son linealmente independientes en todo punto de un abierto, podríamos esperar encontrar un sistema coordenado (U, φ) tal que

$$X|_U = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad Y|_U = \frac{\partial}{\partial x_2},$$

de donde tendríamos que $[X, Y]|_U = [\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}] = 0$.

Luego para lograr tener un sistema coordenado con esa propiedad debemos pedir que $[X, Y] = 0$ en algún abierto, y que X, Y sean L.I. en ese abierto. Mas generalmente tenemos el siguiente resultado:

Teorema 9.18. Sean $X_1, \dots, X_k \in \chi(M)$ campos linealmente independientes en todo un entorno de $p \in M$ y tales que $[X_i, X_j] = 0, \forall i, j$. Entonces existe un sistema coordenado $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ alrededor de p tal que

$$X_1|_U = \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, X_k|_U = \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

La idea de la demostración es considerar la función

$$\sigma(r_1, \dots, r_n) = \theta_{r_1}^1(\theta_{r_2}^2(\dots(\theta_{r_k}^k(0, \dots, 0, r_{k+1}, \dots, r_n)\dots)\dots)),$$

y luego calcular $d\sigma$ adaptando la demostración que vimos en aquel caso. Completar todos los detalles como ejercicio.

9.4. Variedades paralelizables.

Definición 9.9. Una variedad diferenciable M de dimensión m se dice paralelizable, si existen $X_1, \dots, X_m \in \chi(M)$, tales que $\{X_1(p), \dots, X_m(p)\}$ es una base de $T_p M$, para todo $p \in M$.

Si M es paralelizable entonces su fibrado tangente es trivial. Veamos esto qué significa. Dado un vector tangente cualquiera $v \in T_p M$, existen $a_1, \dots, a_m$ tales que

$$v = \sum_{i=1}^m a_i X_i(p).$$

Consideramos la aplicación

$$\sigma : TM \rightarrow M \times \mathbb{R}^n, \quad (p, v) \mapsto (p, a_1, \dots, a_m).$$

Entonces es fácil verificar que σ es C^∞ y su inversa está dada por

$$M \times \mathbb{R}^n \rightarrow TM, \quad (p, a_1, \dots, a_m) \mapsto (p, \sum_{i=1}^m a_i X_i(p)),$$

la cual es también C^∞ . (completar los detalles).

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 9.5. $\mathbb{R}^n$ es paralelizable. $(r_1, \dots, r_n)$ sistema coordenado global. Entonces tomamos la base de campos coordenados $\{\frac{\partial}{\partial r_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial r_n}\}$.

Ejemplo 9.6. $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ es paralelizable: considerar el campo $X(x, y) = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$.

Notar que X está definido y es C^∞ en todo $\mathbb{R}^2$ y además $X \neq 0$ en el abierto $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Hay que probar que $X|_{S^1}$ es un campo C^∞ . Luego $X(p)$ es una base de $T_p S^1$, para todo $p \in S^1$. Cómo se expresa X en el sistema coordenado $(S^1 - \{(1, 0), \varphi^{-1}\})$, donde $\varphi : (0, 2\pi) \rightarrow S^1$, está dado por $\varphi(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$?

Ejemplo 9.7. La esfera $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ es paralelizable. Para probarlo necesitamos introducir los cuaterniones. Sea $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar canónico. Renombramos los vectores canónicos

$$e_1 = 1, \quad e_2 = i, \quad e_3 = j, \quad e_4 = k.$$

Se define una multiplicación en $\mathbb{R}^4$ mediante

$$\begin{aligned} i^2 &= j^2 = k^2 = -1, \\ ij &= k, \quad jk = i, \quad ki = j, \\ ji &= -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j, \end{aligned}$$

y se distribuye la multiplicación por escalares.

Resulta que $\mathbb{R}^4$ con esta multiplicación se denomina el (cuerpo) de los cuaterniones y se denota $\mathbb{H}$.

(continuación del ejemplo)

Sea $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \|x\|^2$. Entonces $S^3 = f^{-1}(\{1\})$. Además

$$T_p S^3 = \text{Ker}\{df_p\} = p^\perp.$$

Definimos campos U, V, W en S^3 :

$$U(p) = i \cdot p, \quad V(p) = j \cdot p, \quad W(p) = k \cdot p$$

Luego los tres son campos tangentes a la esfera S^3 .

Ejercicio 9.3. (a) Probar que U, V, W son campos C^∞ en S^3 que forman base de $T_q S^3$ para todo $q \in S^3$.

(b) Calcular $[U, V], [U, W], [V, W]$.

Teorema: Las esferas de dimensión par S^{2n} nunca son paralelizables.

Que pasa con las esferas de dimensión impar > 3 ? cuales son paralelizables?

10. DISTRIBUCIONES

Las distribuciones en algún sentido se pueden ver como generalizaciones de los campos vectoriales y son importantes en diferentes áreas como la teoría de control, los grupos de Lie y la mecánica.

Definición 10.1. Sea N una variedad diferenciable de dimensión n . Dado un $k \in \mathbb{N}$ con $k < n$, una distribución D de dimensión k en N es una aplicación

$$N \ni p \mapsto D(p) \subset T_p N,$$

donde $D(p)$ es un subespacio de dimensión k de $T_p N$.

La distribución D se dice diferenciable o C^∞ si para todo $p \in N$ existe un entorno abierto U de p y campos C^∞ , $X_1, \dots, X_k \in \chi(U)$ tales que $D(q) = \text{span}\{X_1(q), \dots, X_k(q)\}$, para todo $q \in U$.

Ejemplo 10.1. Los campos

$$X = \frac{\partial}{\partial z}, \quad Y = \cos(z) \frac{\partial}{\partial x} + \sin(z) \frac{\partial}{\partial y}$$

son C^∞ en todo $\mathbb{R}^3$ y generan una distribución C^∞ de dimensión 2.

Definición 10.2. (i) Una subvariedad (M, f) de N se llama *subvariedad integral* de una distribución suave D en N , si $df_q(T_q M) = D(f(q))$, para todo $q \in M$.

(ii) Una distribución suave D se dice *integrable* si para todo $p \in N$ existe una subvariedad (M, f) integral de D que pasa por p , o sea tal que $p \in f(M)$.

Ejemplo 10.2. Si D es una distribución suave de dimensión 1, entonces para todo $p \in N$ existe un entorno U de p y un campo $X \in \chi(U)$, tal que $D(q) = \mathbb{R}X_q$, para todo $q \in U$.

En este caso cualquier curva integral de X es una subvariedad integral de D .

El problema es encontrar condiciones bajo las cuales una distribución es integrable.

Definición 10.3. Sea D una distribución suave en N .

(i) Sea $U \subseteq N$ un abierto. Se dice que un campo $X \in \chi(U)$ está en o pertenece a D en U : " $X \in D$ ", si $X_p \in D(p)$, para todo $p \in U$.

(ii) D se dice involutiva, o completamente integrable, si para cualquier par de campos $X, Y \in D$, se cumple que $[X, Y] \in D$, en N .

Proposición 10.1. Sea D una distribución de dimensión k en N . Entonces D es involutiva si y sólo si para todo $p \in N$ existe un abierto U entorno de p y campos $X_1, \dots, X_k \in \chi(U)$, que generan D en U y que además cumplen $[X_i, X_j] \in D$ en U , para $1 \leq i, j \leq k$.

Demostración: ejercicio. Para la recíproca pasar de local a global usando una función campana. $\square$

Proposición 10.2. Sea $f : M \rightarrow N$ una inmersión. Sea $Y \in \chi(N)$ un campo tal que $Y(f(p)) \in df_p(T_p M)$, para todo $p \in M$. Entonces existe un campo $X \in \chi(M)$ tal que está f -relacionado con Y .

Demostración. Veamos que X es diferenciable. Dado $p \in M$, existen sistemas coordenados cúbicos $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_m))$, $(V, \psi = (y_1, \dots, y_n))$, centrados en p , y $f(p)$ respectivamente tales que

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(r_1, \dots, r_m) = (r_1, \dots, r_m, 0, 0, \dots, 0)$$

Esto implica que

$$df_q\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\bigg|_q = \frac{\partial}{\partial y_i}\bigg|_{f(q)}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad q \in U.$$

Por ser Y diferenciable, existen m funciones $b_i \in C^\infty(V)$ tales que $Y_V = \sum_{i=1}^m b_i \frac{\partial}{\partial y_i}$. Por otra parte existen funciones $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $X_U = \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Veamos que $a_i \in C^\infty(U)$.

$$\begin{aligned}
df(X(q)) &= df\left(\sum_{i=1}^m a_i(q) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_q\right) = \\
&= \sum_{i=1}^m a_i(q) df\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_q\right) = \\
\sum_{i=1}^m a_i(q) \frac{\partial}{\partial y_i} \Big|_{f(q)} &= Y_{f(q)} = \sum_{i=1}^m b_i(f(q)) \frac{\partial}{\partial y_i} \Big|_{f(q)},
\end{aligned}$$

para todo $q \in U$. Luego $a_i = b_i \circ f \in C^\infty(U)$, y entonces $X_U \in \chi(U)$. $\square$

Proposición 10.3. *Sea D una distribución suave de dimensión k en N , que es integrable, i.e. por cada punto $p \in N$ pasa una subvariedad integral de D . Entonces D es involutiva.*

Demostración. Sean $X, Y \in \chi(N)$, tales que $X, Y \in D$ en N . Dado cualquier $p \in N$ veamos que $[X, Y]_p \in D(p)$. Sea (M, f) una subvariedad integral de D tal que $p \in f(M)$, o sea que existe un (único) $q_0 \in M$ tal que $f(q_0) = p$.

Como consecuencia de la Proposición 10.2, existen campos $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \chi(N)$, tales que

$$df \circ \tilde{X} = X \circ f, \quad df \circ \tilde{Y} = Y \circ f.$$

Nota: observar que $\tilde{X}, \tilde{Y}$ están bien definidos y luego probar que son campos C^∞ en M . (ejercicio). Como consecuencia de la Proposición 9.9 resulta que $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ y $[X, Y]$ están f -relacionados:

$$df \circ [\tilde{X}, \tilde{Y}] = [X, Y] \circ f.$$

En particular $df_{q_0}([\tilde{X}, \tilde{Y}](q_0)) = [X, Y](p) \in D(p)$. $\square$

La recíproca del resultado anterior es muy importante:

Teorema 10.4. *de Frobenius local. Sea D una distribución C^∞ de dimensión k en N . Si D es involutiva, entonces es integrable, i.e. para todo $p \in N$, existe un sistema coordenado $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ cúbico centrado en p tal que las rebanadas*

$$R = \{q \in U : x_i(q) = \text{const. para } i = k+1, \dots, n\},$$

son subvariedades integrales de D . Además si $M \subset N$ es una subvariedad integral conexa de D tal que $M \subset U$, entonces M está contenida en alguna de esas rebanadas.

Demostración. Como es un problema local podemos suponer sin pérdida de generalidad que $N = \mathbb{R}^n$, $p = 0$, y que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$D_z = \{A_z^1, \dots, A_z^k\}, \quad \forall z \in C(\varepsilon)^n, \quad A_0^i = \frac{\partial}{\partial r_i} \Big|_0, \quad 1 \leq i \leq k,$$

donde $A^1, \dots, A^k$, son campos C^∞ (y linealmente independientes) en un abierto que contiene al cubo $C(\varepsilon)^n$.

Escribamos las coordenadas $A^j = (a_1^j, \dots, a_n^j)$, y sea $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ la proyección sobre las k -primeras coordenadas. Sea $A_z = [d\pi_z] = (a_i^j(z))_{1 \leq i, j \leq k}$, la matrix $k \times k$, de $d\pi_z$ respecto de las bases $\{A_z^1, \dots, A_z^k\}$, y $\{e_1, \dots, e_k\}$. Para $z = 0$ tenemos $A_0 = I_k$. Por continuidad del determinante resulta que $\det(A_z) \neq 0$, para todo $z \in C(\varepsilon')^n$, $0 < \varepsilon' \leq \varepsilon$. Luego para todo z ahí, $\{A_z^1, \dots, A_z^k\}$, son linealmente independientes.

A continuación buscamos campos X^i en D que se proyecten sobre los $\frac{\partial}{\partial r_i}$, para $1 \leq i \leq k$, o sea que estén π -relacionados con los $\frac{\partial}{\partial r_i}$.

Como $d\pi_z : D_z \rightarrow \mathbb{R}^k$ es un isomorfismo para todo $z \in C(\varepsilon')^n$, entonces para cada i , sea X_z^i el único vector en D_z tal que $d\pi_z(X_z^i) = \frac{\partial}{\partial r_i}$. Dejamos como ejercicio verificar que los X^i así definidos

son C^∞ , y generan D , en $C(\varepsilon')^n$.

En suma existen r campos diferenciables $X^1, \dots, X^k$ tales que

$$X^i(z) \in D_z, \quad d\pi_z X^i(z) = \left. \frac{\partial}{\partial r_i} \right|_{\pi(z)}, \quad i = 1, \dots, k, \quad \forall z \in C(\varepsilon')^n.$$

Como X^i está π -relacionado con $\frac{\partial}{\partial r_i}$, se tiene que

$$d\pi[X^i, X^j](z) = \left[\frac{\partial}{\partial r_i}, \frac{\partial}{\partial r_j} \right](\pi(z)) = 0, \quad \forall z \in C(\varepsilon')^n.$$

Luego $[X^i, X^j]_z \in \text{Ker}(d\pi_z)$, $\forall z$. Como $d\pi_z : D_z \rightarrow \mathbb{R}^k$ es un isomorfismo $\forall z$, se cumple

$$\text{Ker}(d\pi_z) \cap D_z = \{0\}, \quad \forall z.$$

Además por ser D involutiva se cumple que $[X^i, X^j] \in D$, lo que implica que $[X^i, X^j]_z = 0$, $\forall z \in C(\varepsilon')^n$.

Por el teorema 9.18 existe un sistema coordenado cúbico $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$, alrededor de $0 \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$X^i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, k.$$

Podemos suponer que $U = C(\varepsilon')^n$, achicando suficientemente $\varepsilon' > 0$. Entonces las rebanadas $R \subset U$ dados por

$$R = \{q \in U : x_{k+1}(q) = c_{k+1}, \dots, x_n(q) = c_n\},$$

son subvariedades integrales (conexas) de D , porque sus espacios tangentes están generados por los $\frac{\partial}{\partial x_i} = X^i$, para $1 \leq i \leq k$. Por otra parte si $\iota : M \hookrightarrow U$ es una subvariedad integral conexa de D , miramos las diferenciales $d(x_i \circ \iota)$, para $k+1 \leq i \leq n$. Para todo vector $Y \in T_q M$ tenemos $d\iota_q Y \in D_q$, luego $d\iota_q Y$ es combinación lineal de $\{\frac{\partial}{\partial x_j}|_q\}$, $1 \leq j \leq k$, $\forall q \in M$. Entonces para $k+1 \leq i \leq n$ tenemos

$$d(x_i \circ \iota)_q Y = Y_q(x_i \circ \iota) = d\iota_q(Y)(x_i) = 0, \quad \forall q \in M.$$

Luego $x_i \circ \iota$ es constante en M para $k+1 \leq i \leq n$. □

Lema 10.5. *Segundo lema de factorización. Sea D una distribución integrable en N y sea (P, ι) una subvariedad integral de D . Si $f : M \rightarrow N$ es una función C^∞ tal que $f(M) \subset P$, entonces $f_0 : M \rightarrow P$ es C^∞ , donde $f_0 : M \rightarrow P$, es la única aplicación tal que $\iota \circ f_0 = f$.*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ & \searrow f_0 & \uparrow \iota \\ & & P \end{array}$$

Demostración. La daremos próximamente. □

Ejercicio 10.1. Usando el segundo lema de factorización probar que el "ocho" no es subvariedad integral de ninguna distribución C^∞ en $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 10.3. No hay redundancia en las hipótesis del Lema de factorización por una subvariedad integral: no toda subvariedad integral es un embedding. Ejemplo: la línea densa en el toro. Hacer los detalles.

Así como existen curvas integrales maximales de un campo, también existen subvariedades integrales conexas maximales:

Definición 10.4. Dada una distribución suave D en N una subvariedad integrable conexa *maximal* (M, f) de D es una subvariedad integral conexa de D que no está contenida estrictamente en ninguna subvariedad integral conexa de D . Es decir no existe ninguna subvariedad integral conexa (M', f') de D , "más grande" que (M, f) , i.e. tal que $f(M) \subsetneq f'(M')$. Una tal subvariedad se llama "hoja" de D .

Teorema 10.6. *global de Frobenius.* Sea D una distribución suave e integrable en una variedad N . Entonces por cada $p \in N$ existe una única hoja de D que contiene a p . Además toda subvariedad integral conexa de D está contenida en una (única) hoja de D .

Idea de la demostración: Fijado $p \in N$, sea $K \subset N$ el conjunto formado por todos los puntos $q \in N$, tales que existe una curva γ , en N , suave a trozos uniendo p con q , tal que en cada trozo $\gamma'(t) \in D_{\gamma(t)}$. Por el Teorema de Frobenius local, existe un cubrimiento numerable de N por sistemas coordenados $\{(U_i, \varphi_i = (x_1^i, \dots, x_n^i)) : i \in \mathbb{N}\}$, tales que para cada i , las rebanadas $\{x_j^i = \text{constante}, j = k+1, \dots, n\}$ son subvariedades integrales de D , donde $k = \dim D$.

Supongamos que $p \in U_1$, y que $\varphi_1(p) = 0$. Entonces la rebanada $\{x_j^1 = 0, j = k+1, \dots, n\}$, es subvariedad integral de D , y está incluida en K .

Dado $q \in K$, existe un i_q tal que $q \in U_{i_q}$. Sea $S_{i_q} \subset U_{i_q}$, la rebanada que contiene a q . Entonces se cumple que $S_{i_q} \subset K$: dado $q' \in S_{i_q}$, se yuxtapone una curva suave a trozos γ , tangente a D , que une p con q , con una curva desde q a q' contenida en la rebanada S_{i_q} .

Damos a K una topología tal que K es localmente euclídea y conexa. Como base de la topología tomamos los abiertos de las rebanadas S_{i_q} . Se prueba que con esta topología K es además N_0 , aunque no lo hacemos.

Observación: la topología de K no es necesariamente la topología relativa. Por ejemplo la curva densa en el toro.

La estructura diferenciable en K está dada por $\mathcal{F}_0 = \{(S_{i_q}, \pi_k \circ \varphi_{i_q}|_{S_{i_q}})\}$. No demostraremos la compatibilidad de las cartas de K .

Por construcción tenemos que (K, ι) es subvariedad integral conexa de D . Veamos que (K, ι) es una hoja, o sea que es maximal. Sea (M, f) una subvariedad integral conexa de D que pasa por $p \in N$. Queremos ver que $f(M) \subset K$. Dado $q \in f(M)$, busco una curva γ suave a trozos uniendo p con q y tal que $\gamma'(t) \in D_{\gamma(t)}$.

Como M es conexa, existe una curva $\sigma : [0, 1] \rightarrow M$ suave a trozos que une $f^{-1}(p)$, con $f^{-1}(q)$. Veamos que $\gamma = f \circ \sigma$ funciona. Claramente γ une p con q . Calculamos

$$\gamma'(t) = df_{\sigma(t)}\sigma'(t).$$

Como $\sigma'(t) \in T_{\sigma(t)}M$, $\forall t$, resulta que $\gamma'(t) \in D_{\gamma(t)}$, $\forall t$. Luego $q \in K$. Luego $f(M) \subset K$.

La unicidad es consecuencia inmediata del Segundo lema de factorización y lo dejamos como ejercicio.

□

11. ALGEBRA MULTILINEAL

Sea V un espacio vectorial real de dimensión n .

Definición 11.1. Dado $k \in \mathbb{N}$ se define el conjunto de funciones k -lineales en V :

$$(13) \quad T^k(V^*) = \{f : \underbrace{V \times \cdots \times V}_k \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es } k\text{-lineal}\}$$

k -lineal significa que f es lineal en cada variable, cuando las otras se fijan. Se ve que $T^k(V^*)$ es un espacio vectorial. Notar que $T^1(V^*) = V^*$. Se conviene en que $T^0(V^*) = \mathbb{R}$.

Definición 11.2.

$$(14) \quad \Lambda^k(V^*) = \{f \in T^k(V^*) : f \text{ es alternante}\},$$

es el espacio de las formas k -lineales alternantes de V .

Ser alternante significa que

$$f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -f(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k), \quad \forall (v_1, \dots, v_k) \in \underbrace{V \times \cdots \times V}_k.$$

En particular $f(v_1, \dots, v_k) = 0$, si $v_i = v_j$ para algún $i \neq j$.

Se comprueba que tanto $T^k(V^*)$ como $\Lambda^k(V^*)$ son espacios vectoriales. Se tiene que $\Lambda^1(V^*) = V^*$. Por conveniencia se define $\Lambda^0(V^*) = \mathbb{R}$.

De la alternancia resulta la siguiente propiedad:

Proposición 11.1. Para toda $f \in \Lambda^k(V^*)$, y toda permutación $\pi \in S_k$ se cumple

$$(15) \quad f(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) = \text{sign}(\pi) f(v_1, \dots, v_k),$$

donde S_k es el grupo de todas las permutaciones del conjunto $\{1, 2, \dots, k\}$.

Demostración: ejercicio. Sale usando que toda permutación es producto de transposiciones.

Ejemplo 11.1. Sea $V = \mathbb{R}^n$. Entonces el determinante $\det \in \Lambda^n(V^*)$: i.e. $\det : \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es multilinear y alternante como función de las columnas o filas de una matriz $n \times n$. Notar que $M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n \times n}$ se identifica con el producto $\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n$, n -veces. Las funciones k -lineales alternantes generalizan el determinante.

Ejemplo 11.2. Dado $w \in \mathbb{R}^3$, fijo. Sea $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la función $f(u, v) = \langle u \times v, w \rangle = \det(u, v, w)$. f es el "volumen signado" del paralelepípedo generado por los vectores u, v, w . Luego $f \in \Lambda^2(\mathbb{R}^{3*})$ (se prueba que $f > 0$ si u, v, w tienen la misma orientación que la base canónica).

Definición 11.3. Dada $f \in T^k(V^*)$ se define su alternancia por

$$\text{Alt}(f)(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sign}(\sigma) f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}).$$

Dada $\sigma \in S_k$, se define una acción del grupo S_k sobre k -uplas de vectores de V :

$$\sigma(v_1, \dots, v_k) = (v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}), \quad \forall v_1, \dots, v_k \in V.$$

Se verifica que esta acción satisface

$$\sigma(\pi(v_1, \dots, v_k)) = (\pi \circ \sigma)(v_1, \dots, v_k), \quad \forall \sigma, \pi \in S_k.$$

De la definición de Alt se tiene que podemos expresar

$$\text{Alt}(f) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sign}(\sigma) \cdot f \circ \sigma.$$

Proposición 11.2. *Propiedades de Alt:*

- (i) $Alt : T^k(V^*) \rightarrow \Lambda^k(V^*)$, i.e. $Alt(f)$ es k -lineal y alternante, para toda f , k -lineal.
(ii) $Alt(f) = f$, para toda $f \in \Lambda^k(V^*)$ (usar (15)).

Demostración. No la daremos. □

Definición 11.4. Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sean $1 \leq k, l \leq n$.

- (i) Dados $f \in T^k(V^*)$, $g \in T^l(V^*)$, se define su producto tensorial $f \otimes g \in T^{k+l}(V^*)$, mediante:

$$(f \otimes g)(v_1, \dots, v_{k+l}) = f(v_1, \dots, v_k) \cdot g(v_{k+1}, \dots, v_{k+l}), \quad \forall v_1, \dots, v_{k+l} \in V.$$

- (ii) $(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h)$, $\forall f \in T^k(V^*)$, $g \in T^l(V^*)$, $h \in T^p(V^*)$. Esta propiedad garantiza la buena definición del producto tensorial de muchos factores.

- (iii) Dados $f \in \Lambda^k(V^*)$, $g \in \Lambda^l(V^*)$, se define su producto exterior $f \wedge g \in \Lambda^{k+l}(V^*)$ por

$$(f \wedge g)(v_1, \dots, v_{k+l}) = \frac{(k+l)!}{k!l!} Alt(f \otimes g)(v_1, \dots, v_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\pi \in S_{k+l}} sign(\pi) f(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) g(v_{\pi(k+1)}, \dots, v_{\pi(k+l)}).$$

Notar que el producto tensorial no es conmutativo. Por ejemplo si $\dim V = n \geq 2$, y $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base y $\{e^1, \dots, e^n\}$, su base dual, entonces por ejemplo $e^i \otimes e^j(v, w) = e^i(v)e^j(w)$, pero $e^j \otimes e^i(v, w) = e^j(v)e^i(w)$.

Proposición 11.3. *Propiedades del producto tensorial y del producto exterior.*

- (a) $\wedge$ es bilineal: $(f + ch) \wedge g = f \wedge g + ch \wedge g$, y lo mismo para el segundo factor.
(b) $\wedge$ es asociativo: si $f \in \Lambda^k(V^*)$, $g \in \Lambda^l(V^*)$, $h \in \Lambda^m(V^*)$, entonces $(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h)$.
(c) Dados $f \in \Lambda^k(V^*)$, $g \in \Lambda^l(V^*)$, $h \in \Lambda^m(V^*)$, se tiene

$$(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h) = \frac{(k+l+m)!}{k!l!m!} Alt(f \otimes g \otimes h).$$

Notar que esta propiedad permite definir el producto exterior de muchos factores sin ambigüedad.

- (d) Si $f \in \Lambda^k(V^*)$ y $g \in \Lambda^p(V^*)$, entonces $f \wedge g = (-1)^{kp} g \wedge f$. (en particular si k es impar, entonces k^2 es impar y por lo tanto $f \wedge f = 0$).

Demostración. No daremos las demostraciones de (a), (b), (c), (d) (ver libros de F. Warner y J. Lee).

Para la prueba de (d) usaremos el siguiente hecho que probaremos mas adelante: el conjunto $\{e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k} : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$ es una base de $\Lambda^k(V^*)$, para todo $0 \leq k \leq n$.

Primero verificamos que se cumple (d) para $f, g \in \Lambda^1(V^*)$. Aplicando la definición del producto exterior tenemos

$$(f \wedge g)(u, v) = \frac{1}{1!1!} (f(u)g(v) - f(v)g(u)) = -(g \wedge f)(u, v).$$

Para el caso general por bilinealidad del producto exterior, basta probarlo para el caso $f = ae^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}$, y $g = be^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_p}$. Entonces aplicando paso a paso el caso anterior tenemos,

$$\begin{aligned} f \wedge g &= ab.e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k} \wedge e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_p} = \\ &ab.e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_{k-1}} \wedge e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_p} \wedge e^{i_k} (-1)^p = \\ &ab.e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_{k-2}} \wedge e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_p} \wedge e^{i_{k-1}} \wedge e^{i_k} (-1)^p (-1)^p = \\ &\vdots \\ &ab.e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_p} \wedge e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k} (-1)^{pk} = \\ &(-1)^{pk} g \wedge f. \end{aligned}$$

□

Sea $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base de V y $B^* = \{e^1, \dots, e^n\}$ la base dual. Como consecuencia del punto (c) de la Proposición anterior, tenemos que para $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, y vectores arbitrarios $v_1, \dots, v_k \in V$ se cumple

$$\begin{aligned} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}(v_1, \dots, v_k) &= k! \text{Alt}(e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k})(v_1, \dots, v_k) = \\ &= \sum_{\sigma \in \text{Per}(i_1, \dots, i_k)} \text{sign}(\sigma) \cdot (e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k}) \circ \sigma(v_1, \dots, v_k) = \\ &= \sum_{\sigma \in \text{Per}(i_1, \dots, i_k)} \text{sign}(\sigma) \cdot (e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k})(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \\ &= \sum_{\sigma \in \text{Per}(i_1, \dots, i_k)} \text{sign}(\sigma) e^{i_1}(v_{\sigma(1)}) e^{i_2}(v_{\sigma(2)}) \dots e^{i_k}(v_{\sigma(k)}), \end{aligned}$$

donde en ésta última expresión se reconoce la fórmula del determinante de la matriz $((e^{i_s}(v_t))_{1 \leq s, t \leq k})$. De esto resulta la identidad

$$e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}(v_1, \dots, v_k) = \det((e^{i_s}(v_t))_{1 \leq s, t \leq k}) =$$

$$\det \begin{pmatrix} e^{i_1}(v_1) & \dots & e^{i_1}(v_k) \\ e^{i_2}(v_1) & \dots & e^{i_2}(v_k) \\ \vdots & & \vdots \\ e^{i_k}(v_1) & \dots & e^{i_k}(v_k) \end{pmatrix},$$

En particular $e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = 1$.

Proposición 11.4. Si $\dim V = n$, entonces para $k > n$, resulta $\Lambda^k(V^*) = \{0\}$.

En cambio si $0 < k \leq n$, y fijamos una base $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ de V , y $B^* = \{e^1, \dots, e^n\}$ la base dual, entonces el conjunto $\mathcal{B} \subset \Lambda^k(V^*)$ formado por elementos de la forma:

$$e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_k}, \quad 1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n,$$

es una base y por lo tanto $\dim \Lambda^k(V^*) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Demostración. Dados $v_1, \dots, v_k \in V$, entonces cada $v_j = \sum_{i=1}^n e^i(v_j) e_i$. Para cualquier $f \in \Lambda^k(V^*)$, tenemos

$$f(v_1, \dots, v_k) = f\left(\sum_{i_1=1}^n e^{i_1}(v_1) e_{i_1}, \dots, \sum_{i_k=1}^n e^{i_k}(v_k) e_{i_k}\right) = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_k=1}^n f(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) e^{i_1}(v_1) \dots e^{i_k}(v_k).$$

Si $k > n$, todos los términos de la forma $f(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$, son todos nulos porque en cada uno hay vectores de la base que aparecen repetidos. Luego $f = 0$.

En cambio si $0 < k \leq n$, entonces podemos expresar lo de arriba como

$$f = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_k=1}^n f(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k}.$$

Como f es alternante, aplicando la Proposición 11.2 resulta

$$f = \text{Alt}(f) = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_k=1}^n f(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \text{Alt}(e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k}).$$

Pero por definición $\text{Alt}(e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k})$, es igual a cero cuando hay índices repetidos, o bien es $\frac{1}{k!} e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_k}$, cuando $j_1 < \dots < j_k$. O sea que

$$f = \frac{1}{k!} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} f(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_k}.$$

En particular resulta que el conjunto $\mathcal{B}$ genera $\Lambda^k(V^*)$. Sea

$$0 = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} a_{j_1, \dots, j_k} e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_k}.$$

Aplicando ambos lados a $(e_{j_1}, \dots, e_{j_k})$ resulta $a_{j_1, \dots, j_k} = 0$. $\square$

12. FORMAS DIFERENCIALES EN VARIEDADES

Las formas diferenciales en variedades surgen por la necesidad de tener una buena generalización del rotor y la divergencia en $\mathbb{R}^3$.

Sea M una variedad diferenciable de dimensión m . Dado un sistema coordenado $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_m))$ alrededor de $p \in U$, entonces $\{\frac{\partial}{\partial x_i}|_q\}$ es una base de $T_q M$ y $\{dx_i|_q\}$ su base dual $\forall q \in U$. Entonces el conjunto

$$\{dx_{i_1}|_q \wedge \dots \wedge dx_{i_k}|_q : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m\},$$

es una base de $\Lambda^k(T_q^* M)$, para todo $q \in U$.

Definición 12.1. Sea k un entero tal que $0 \leq k \leq n$. Una k -forma diferencial ω en M es una asignación

$$\omega : M \ni q \mapsto \omega_q \in \Lambda^k(T_q^* M),$$

de manera suave o C^∞ , i.e. dado un sistema coordenado (U, φ) , entonces

$$\omega_q = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1, \dots, i_k}(q) dx_{i_1}|_q \wedge \dots \wedge dx_{i_k}|_q, \quad \forall q \in U.$$

Decimos que ω es diferenciable si para todo sistema coordenado (U, φ) las funciones $a_{i_1, \dots, i_k} \in C^\infty(U)$. Se prueba que la diferenciabilidad de ω en realidad es independiente de los sistemas coordenados. Se define el conjunto de las k -formas diferenciables en M :

$$E^k(M) = \{k\text{-formas diferenciales en } M\}, \quad E^0(M) = C^\infty(M).$$

Ejemplo 12.1. Dada $f \in C^\infty(M)$, entonces $df \in E^1(M) = 1\text{-formas en } M$.

Mas adelante veremos que si $\dim(M) = m$ entonces una m -forma nunca nula en M provee una manera de definir el volumen de subconjuntos de M .

Ejemplo 12.2. Sea $W \in \chi(\mathbb{R}^3)$ un campo y sea $\omega \in E^2(\mathbb{R}^3)$ la 2-forma definida por

$$\omega_q(u, v) = \det(u, v, W(q)), \quad u, v \in T_q \mathbb{R}^3.$$

Entonces $\omega_q(u, v)$ es el volumen signado del paralelepípedo generado por $u, v, W(q)$. La interpretación más natural es pensar que $\omega_q(u, v)$ mide la cantidad de fluido que atraviesa el paralelogramo generado por u, v , en la dirección de $W(q)$.

Si $\{u, v, W(q)\}$ tiene la misma orientación que la base canónica, entonces $\omega_q(u, v)$ es igual al volumen del prisma generado por $\{u, v, W(q)\}$.

12.1. La derivada exterior. Sea M una variedad diferenciable de dimensión m . Para cada $0 \leq k \leq m$ se define un operador $d_k : E^k(M) \rightarrow E^{k+1}(M)$, de la siguiente manera:

Primero se define $d_0 : E^0(M) \rightarrow E^1(M)$, como $d_0 f = df, \forall f \in E^0(M)$.

Sea $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_m))$ un sistema coordenado en M y sea $\omega \in E^k(M)$, con $k = 1, 2, \dots$. Entonces se tiene que

$$\omega|_U = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} a_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}, \quad a_{i_1, \dots, i_k} \in C^\infty(U).$$

En este caso se define

$$d_k \omega|_U = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} da_{i_1, \dots, i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

Nota: parecería que d_k depende de que sistema coordenado usemos. Pero en realidad se demuestra (aunque no lo haremos) que d_k está bien definida, o sea, no depende de los sistemas coordenados.

Ejemplo 12.3. Sea $\omega \in E^2(\mathbb{R}^4)$ dada por

$$\omega_{(x,y,z,w)} = \sin y dx \wedge dz + xw^2 dy \wedge dw.$$

La base global de 3-formas de $\mathbb{R}^4$ es

$$\{dx \wedge dy \wedge dz, dx \wedge dy \wedge dw, dy \wedge dz \wedge dw, dx \wedge dz \wedge dw\}.$$

Entonces vamos a expresar $d\omega$ en esa base:

$$(d\omega)_{(x,y,z,w)} = (d \sin y) \wedge dx \wedge dz + (dxw^2) \wedge dy \wedge dw.$$

$$d \sin y = \frac{\partial}{\partial y} \sin y \cdot dy = \cos y \cdot dy = 0dx + \cos y dy + 0dz + 0dw,$$

$$d(xw^2) = w^2 dx + xdw^2 = w^2 dx + 2xw dw, \quad \text{Luego}$$

$$\begin{aligned} (d\omega)_{(x,y,z,w)} &= (\cos y) dy \wedge dx \wedge dz + (w^2 dx + 2xw dw) \wedge dy \wedge dw = \\ &= -(\cos y) dx \wedge dy \wedge dz + w^2 dx \wedge dy \wedge dw. \end{aligned}$$

Proposición 12.1. *Propiedades de la derivada exterior:*

(1) Si $\alpha \in E^k(M)$ y $\beta \in E^l(M)$, entonces

$$d_{k+l}(\alpha \wedge \beta) = (d_k \alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d_l \beta.$$

(2) $d_{k+1} \circ d_k : E^k(M) \rightarrow E^{k+2}(M)$, es el operador nulo $\forall k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Demostración. (1) Probemos primero el caso $\alpha = f, \beta = g \in E^0(M) = C^\infty(M)$:

$$d(f \wedge g) = d(fg) = f \cdot dg + df \cdot g = f \wedge dg + (-1)^0 g \wedge df,$$

donde la primera igualdad resulta de calcular $d(fg)(X) = Xf \cdot g + f \cdot Xg$, con $X \in \chi(M)$.

El paso siguiente es probar la fórmula para el caso $k = 0, l \in \mathbb{N}$: $\alpha = f \in C^\infty(M), \beta \in E^l(M)$. Entonces $\alpha \wedge \beta = f\beta \in E^l(M)$. Para probar que se cumple $d(f\beta) = df \wedge \beta + (-1)^0 f d_l \beta$, es suficiente hacerlo para $\beta = h dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_l}$:

$$\begin{aligned} d_l(f\beta) &= d_l(fh dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_l}) = d(fh) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_l} = \\ &= (df \wedge h + f \wedge dh) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_l} = df \wedge \beta + f \wedge d_l \beta. \end{aligned}$$

Dejamos para el lector completar los detalles para el caso general $k, l \in \mathbb{N}$.

(2) como d_l se distribuye respecto de la suma basta probar que $\forall f \in C^\infty, \forall i_1 < \dots < i_k$ vale $0 = d_{k+1} d_k(f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})$:

$$\begin{aligned}
d_{k+1}d_k(fdx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) &= d_{k+1}(df \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) = \\
d_{k+1}\left(\sum_{s=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_s} dx_s \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}\right) &= \sum_{s=1}^m d\left(\frac{\partial f}{\partial x_s}\right) \wedge dx_s \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} = \\
\sum_{1 \leq s, t \leq m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_t \partial x_s} dx_t \wedge dx_s \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} &= \\
\sum_{1 \leq s < t \leq m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_t \partial x_s} dx_t \wedge dx_s \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_s \partial x_t} dx_s \wedge dx_t \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} &= \\
\sum_{1 \leq s < t \leq m} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_s \partial x_t} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_t \partial x_s}\right) dx_s \wedge dx_t \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} &= 0.
\end{aligned}$$

□

12.2. Formas cerradas y exactas. Una 1-forma α en $\mathbb{R}$ se escribe $\alpha = fdr$, donde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es C^∞ . Nos preguntamos si existe una $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $d_0g = \alpha = fdr$? Respuesta: si. Por ejemplo tomar $g(t) = \int_0^t f(x)dx$, definida para todo $t \in \mathbb{R}$.

Veamos la situación análoga en $\mathbb{R}^2$. Dada una 1-forma $\theta \in E^1(\mathbb{R}^2)$, esta se expresa $\theta = fdx + gdy$, para ciertas $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$. Nos hacemos la misma pregunta que antes: ¿existe $h \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que $d_0h = \theta$? Supongamos que si, entonces $0 = d_1d_0h = d_1\theta$, o sea

$$\begin{aligned}
0 = d_1\theta &= d_1(fdx + gdy) = df \wedge dx + dg \wedge dy = \\
&\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy\right) \wedge dy = \\
&\left(-\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x}\right)dx \wedge dy.
\end{aligned}$$

Luego $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$, es condición necesaria para que la ecuación $dh = \theta$ tenga solución.

Definición 12.2. Una k -forma $\theta \in E^k(M)$ se dice *cerrada* si $d_k\theta = 0$, y se dice *exacta*, si existe una $(k-1)$ -forma α tal que $\theta = d_{k-1}\alpha$.

Se cumple que toda forma exacta es cerrada como consecuencia de la Proposición 12.1. Al revés, podemos preguntarnos si es cierto que toda forma cerrada es exacta. La respuesta es si, pero sólo localmente, no globalmente. Por ejemplo la 1-forma canónica $d\theta$ en S^1 , que se estudia en el práctico. Más precisamente sea $\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$, la 1-forma en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$...etc Se vislumbra que las k -formas cerradas no exactas detectan "agujeros" de dimensión k en M .

12.3. El pull-back de formas. Dada una aplicación suave $F : M \rightarrow N$ entre variedades y dada una k -forma $\theta \in E^k(N)$ se define el *pull-back* $F^*\theta$ de θ por F mediante,

$$(F^*\theta)_p(v_1, \dots, v_k) = \theta_{F(p)}(dF_p(v_1), \dots, dF_p(v_k)), \quad v_1, \dots, v_k \in T_pM.$$

Proposición 12.2. *Propiedades del pull-back:*

- (1) $F^*\theta \in E^k(M)$,
- (2) $F^*(\alpha \wedge \beta) = (F^*\alpha) \wedge (F^*\beta)$, $\forall \alpha \in E^k(M), \beta \in E^l(M)$.
- (3) $F^*(d_k\theta) = d_k F^*\theta$.

Demostración. (1) Por ser F suave, tenemos que para todo sistema coordenado $(V, \psi = (y_1, \dots, y_n))$ en N , existe un abierto $U \subset M$ tal que $F(U) \subset V$, y $y_i \circ F \in C^\infty(U)$, para $1 \leq i \leq n$. Además como θ es C^∞ , existen $a_{i_1, \dots, i_k} \in C^\infty(V)$ tales que

$$\theta_V = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1, \dots, i_k} dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k}.$$

Entonces

$$(16) \quad (F^*\theta)_U = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (a_{i_1, \dots, i_k} \circ F) \cdot d(y_{i_1} \circ F) \wedge \dots \wedge d(y_{i_k} \circ F).$$

Luego sigue que $F^*\theta_U$ es C^∞ en U .

Probemos (2):

$$\begin{aligned} (F^*\alpha) \wedge (F^*\beta)(v_1, \dots, v_{k+l}) &= \frac{1}{k!l!} \sum_{\pi \in S_{k+l}} \text{sgn}(\pi) (F^*\alpha)(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) (F^*\beta)(v_{\pi(k+1)}, \dots, v_{\pi(k+l)}) = \\ &= \frac{1}{k!l!} \sum_{\pi \in S_{k+l}} \text{sgn}(\pi) \alpha(dF(v_{\pi(1)}), \dots, dF(v_{\pi(k)})) \beta(dF(v_{\pi(k+1)}), \dots, dF(v_{\pi(k+l)})) = \\ &= (\alpha \wedge \beta)(dF(v_{\pi(1)}), \dots, dF(v_{\pi(k+l)})) = F^*(\alpha \wedge \beta)(v_1, \dots, v_{k+l}). \end{aligned}$$

Por último probemos (3). Primero veamos que se cumple para $k = 0$. Sea $\theta = f \in C^\infty(N)$, entonces $F^*f = f \circ F$. Además, dado $X \in \chi(M)$ cualquiera vemos que

$$F^*(df)(X) = df(dF(X)) = d(f \circ F)(X) = d(F^*f)(X).$$

Ahora en general de la expresión (16) y de aplicar (2) resulta

$$\begin{aligned} d(F^*\theta)_U &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} d(a_{i_1, \dots, i_k} \circ F) \wedge d(y_{i_1} \circ F) \wedge \dots \wedge d(y_{i_k} \circ F) = \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} F^*(da_{i_1, \dots, i_k}) \wedge F^*(dy_{i_1}) \wedge \dots \wedge F^*(dy_{i_k}) = F^*(d\theta)_U. \end{aligned}$$

□

13. LA NOCIÓN DE ORIENTACIÓN

En la recta $\mathbb{R}$ hay dos orientaciones posibles, ir de izquierda a derecha o viceversa. Podemos fijar una orientación eligiendo $+1$, o -1 .

En el plano $\mathbb{R}^2$, no hay una dirección privilegiada. Se toma por convención la orientación dada por el sentido de giro "antihorario":

$$e_1 \rightarrow e_2.$$

En el espacio $\mathbb{R}^3$, tampoco hay direcciones privilegiadas. Hay una noción de orientación conocida como "regla de la mano derecha" o "regla del tirabuzón" o sacacorchos que es usada en Física:

$$(derecha) \quad e_1 \rightarrow e_2 \rightarrow e_3.$$

O bien la "regla de la mano izquierda":

$$(izquierda) \quad e_2 \rightarrow e_1 \rightarrow e_3.$$

13.1. Orientación de espacios vectoriales.

Definición 13.1. Sea V un espacio vectorial real de dimensión n . Definimos una relación de equivalencia en el conjunto de bases ordenadas de V : dos bases ordenadas $B = \{u_1, \dots, u_n\}$, $C = \{v_1, \dots, v_n\}$, se dicen equivalentes, o $B \sim C$, si $\det A > 0$, donde A es la matriz de cambio de coordenadas entre ellas.

Proposición 13.1. Hay exactamente dos clases de equivalencia.

Demostración. Hay por lo menos dos clases porque por ejemplo $\{u_1, u_2, \dots, u_n\} \not\sim \{-u_1, u_2, \dots, u_n\}$. Por otro lado no hay mas de dos: si $B \approx D$ y $C \approx D$, entonces se ve que $B \sim C$. □

Definición 13.2. Una orientación en V , es la elección de una de las dos clases de equivalencia. Decimos que $(V, [B])$ es un espacio vectorial orientado. Si $C \in [B]$, decimos que C está *positivamente orientada*.

Ejemplo 13.1. Sea $V = \mathbb{R}^n$, $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ la base canónica. Entonces $[B]$ es la orientación canónica.

Ejemplo 13.2. Para $n = 2$, sea $C = \{(1, 0), (\cos t, \sin t)\}$. Entonces C es una base positiva de $\mathbb{R}^2$ si $0 < t < \pi$, y es negativa si $\pi < t < 2\pi$.

Lema 13.2. Sea $\omega \in \Lambda^n(V^*)$ y sea $\{u_1, \dots, u_n\}$ una base de V . Entonces dados $v_1, \dots, v_n \in V$, se sumple que

$$\omega(v_1, \dots, v_n) = \det(A)\omega(u_1, \dots, u_n),$$

donde A es la matriz de los v_i 's en términos de los u_j 's.

Demostración. Sea $A = (a_{ij})$ la matriz de cambio de base tal que $v_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}u_i$. Entonces por linealidad, alternanciay (15) resulta

$$\begin{aligned} \omega(v_1, \dots, v_n) &= \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in S_n} a_{i_1,1}a_{i_2,2} \dots a_{i_n,n} \omega(u_{i_1}, \dots, u_{i_n}) = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n} (\text{sgn} \sigma) \omega(u_1, \dots, u_n) = \\ &= \left(\sum_{\sigma \in S_n} (\text{sgn} \sigma) a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n} \right) \omega(u_1, \dots, u_n) = (\det A) \omega(u_1, \dots, u_n), \end{aligned}$$

donde en la última igualdad usamos la fórmula del determinante. □

Habíamos visto que $\dim \Lambda^n(V^*) = \binom{n}{n} = 1$, i.e. $\Lambda^n(V^*) \equiv \mathbb{R}$. Una n -forma $\omega \in \Lambda^n(V^*) - \{0\}$, induce una orientación en V , de la siguiente manera:

Una base ordenada $\{v_1, \dots, v_n\}$, se dice orientada si $\omega(v_1, \dots, v_n) > 0$. Notar que el conjunto $\mathcal{B}$ de todas las bases ordenadas "orientadas" es no vacío. Por ejemplo si $\omega(u_1, \dots, u_n) < 0$, entonces $\omega(-u_1, u_2, \dots, u_n) > 0$.

Proposición 13.3. Dada una base $\{e_1, \dots, e_n\} \in \mathcal{B}$, entonces $\mathcal{B} = [\{e_1, \dots, e_n\}]$, i.e. la clase de equivalencia de $\{e_1, \dots, e_n\}$.

Demostración. Si $\{e'_1, \dots, e'_n\} \in [\{e_1, \dots, e_n\}]$, entonces la matriz $A = (a_{ij})$, tal que $e'_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}e_i$, satisface $\det(A) > 0$, luego

$$\omega(e'_1, \dots, e'_n) = \det(A)\omega(e_1, \dots, e_n) > 0.$$

Por lo tanto $\{e'_1, \dots, e'_n\} \in \mathcal{B}$, i.e. $[\{e_1, \dots, e_n\}] \subset \mathcal{B}$.

Veamos ahora que $\mathcal{B} \subset [\{e_1, \dots, e_n\}]$. Sea $\{e^1, \dots, e^n\}$, la base dual de $\{e_1, \dots, e_n\}$. Dada $\{v_1, \dots, v_n\} \in \mathcal{B}$, por ser $e^1 \wedge e^2 \wedge \dots \wedge e^n$ base de $\Lambda^n(V^*)$, tenemos que existe un $c \in \mathbb{R}$, tal que $\omega = ce^1 \wedge e^2 \wedge \dots \wedge e^n$. Luego

$$\omega(e_1, \dots, e_n) = ce^1 \wedge e^2 \wedge \dots \wedge e^n(e_1, \dots, e_n) = c.$$

O sea que podemos expresar $\omega = \omega(e_1, \dots, e_n) \cdot e^1 \wedge e^2 \wedge \dots \wedge e^n$. Sea $A = (a_{ij})$ la matriz tal que $v_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}e_i$. Entonces de la igualdad

$$\omega(v_1, \dots, v_n) = \omega(e_1, \dots, e_n) \det(A),$$

resulta $\det(A) > 0$, y por lo tanto $\{v_1, \dots, v_n\} \sim \{e_1, \dots, e_n\}$. Luego $\mathcal{B} = [\{e_1, \dots, e_n\}]$. □

13.2. Orientación en variedades.

Definición 13.3. Sea M una variedad conexa de dimensión m . M se dice orientable si existe un atlas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in I\}$, con $\varphi_\alpha = (x_1^\alpha, \dots, x_m^\alpha)$, tal que $\forall \alpha, \beta \in I$, con $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, se cumple que

$$\det \left(\frac{\partial x_i^\alpha}{\partial x_j^\beta} \right) > 0.$$

Recordar que $(\frac{\partial x_i^\alpha}{\partial x_j^\beta})_{\{1 \leq i, j \leq m\}}$, es la matriz jacobiana de $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$.

Notar que fijado (si existe) un atlas con esa propiedad, entonces dado $p \in M$, la orientación en $T_p M$ está dada por $[\frac{\partial}{\partial x_1^\alpha}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n^\alpha}]$, para cualquier α .

Ejemplo 13.3. La cinta de Moebius es no-orientable (práctico).

Ejemplo 13.4. S^n es orientable. Para probarlo basta tomar el atlas dado por los sistemas de coordenadas estereográficos, $\mathcal{A} = \{(S^n - \{PN\}, \varphi^N), (S^n - \{PS\}, \varphi^S)\}$. Entonces, o bien $\mathcal{A}$ da una orientación, o definiendo en vez de $\varphi^S = (x_1, \dots, x_n)$, cambiar por $\psi^S = (-x_1, \dots, x_n)$. Luego $\mathcal{A}' = \{(S^n - \{PN\}, \varphi^N), (S^n - \{PS\}, \psi^S)\}$, da la orientación.

Teorema 13.4. Sea M una variedad diferenciable conexa. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i) M es orientable.
- (ii) Existe una n -forma continua nunca nula en M .
- (iii) Existe una n -forma C^∞ , nunca nula en M .

Nota: $\omega \in E^n(M)$ nunca nula significa que $\omega_p \neq 0$ para todo $p \in M$. Recordar que $\omega_p \in \Lambda^n(T_p^* M)$.

Demostración. (iii) $\Rightarrow$ (ii), es obvio.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sea $\omega \in E^n(M)$, continua y nunca nula. Buscamos un atlas $\mathcal{A}$ cuyas matrices jacobianas de transición tienen $\det > 0$. Sea $\mathcal{B} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in I\}$ un atlas cualquiera de M , para el cual podemos suponer que los U_α son conexos. Para cada $\alpha \in I$ definimos

$$f_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_\alpha(p) = \omega_p\left(\frac{\partial}{\partial x_1^\alpha}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n^\alpha}\Big|_p\right).$$

Entonces se tiene que f_α es nunca nula en U_α . Como U_α es conexo, es $f_\alpha > 0$, o bien $f_\alpha < 0$ en U_α . Definimos el atlas buscado como sigue:

$$\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{B} : f_\alpha > 0\} \cup \{(U_\alpha, \psi_\alpha) \in \mathcal{B} : f_\alpha < 0\},$$

donde, si $f_\alpha < 0$, $\psi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ se define a partir de φ_α cambiando el signo de x_1^α :

$$\psi_\alpha = (-x_1^\alpha, x_2^\alpha, \dots, x_n^\alpha).$$

Entonces $\mathcal{A}$ es un atlas (porqué?) y además satisface lo pedido. Dados $\alpha, \beta \in I$, tales que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, tenemos que en $U_\alpha \cap U_\beta$ se cumple:

$$f_\alpha = \omega\left(\frac{\partial}{\partial x_1^\alpha}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n^\alpha}\right) = \det(d(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})) \cdot \omega\left(\frac{\partial}{\partial x_1^\beta}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n^\beta}\right) = \det(d(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})) \cdot f_\beta.$$

Si $f_\alpha > 0$, y $f_\beta > 0$, entonces $\det(d(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})) > 0$.

Por otra parte si $f_\alpha > 0$ y $f_\beta < 0$, entonces $\det(d(\psi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})) = -\det(d(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})) > 0$. Los otros dos casos son similares. Luego el atlas es el buscado.

(i) $\Rightarrow$ (iii): Tengo un atlas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in I\}$ de M cuyos cambios de coordenadas tienen $\det > 0$. Busco una $\omega \in E^n(M)$ nunca nula. Para cada $\alpha \in I$ defino $\omega^\alpha \in E^n(U_\alpha)$ mediante

$$\omega^\alpha = dx_1^\alpha \wedge \dots \wedge dx_n^\alpha.$$

Sea $\{\theta_\alpha\}$ una partición de la unidad subordinada al cubrimiento $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$. Definimos

$$\omega = \sum_{\alpha \in I} \Omega^\alpha, \quad \text{donde } \Omega^\alpha = \begin{cases} \theta_\alpha \omega^\alpha, & \text{en } U_\alpha, \\ 0, & \text{en } U_\alpha^c. \end{cases}$$

Luego ω es C^∞ en M , porque localmente es suma finita de formas C^∞ . Además ω es n -lineal y alternante. Sólo falta ver que ω es nunca nula. Dado $p \in M$ veamos que $\omega_p \neq 0$. Como $\sum \theta^\alpha(p) = 1$, y $\theta^\alpha(p) \geq 0$, $\forall \alpha \in I$, resulta que existe $\beta \in I$ tal que $\theta^\beta(p) > 0$. Entonces calculamos

$$\begin{aligned} \omega_p\left(\frac{\partial}{\partial x_1^\beta}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n^\beta}\Big|_p\right) &= \theta^\beta(p)\omega_p^\beta\left(\frac{\partial}{\partial x_1^\beta}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n^\beta}\Big|_p\right) + \sum_{\alpha \neq \beta, \alpha \in I} \Omega_p^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_1^\beta}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n^\beta}\Big|_p\right) = \\ &= \theta^\beta(p) \cdot 1 + \sum_{\alpha \neq \beta, \alpha \in I} \theta^\alpha(p)\omega_p^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_1^\beta}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n^\beta}\Big|_p\right) = \theta^\beta(p) + \sum_{\alpha \neq \beta, \alpha \in I} \theta^\alpha(p) \det\left(\frac{\partial x_i^\beta}{\partial x_j^\alpha}\right) \omega_p^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_1^\alpha}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n^\alpha}\Big|_p\right) = \\ &= \theta^\beta(p) + \sum_{\alpha \neq \beta, \alpha \in I} \theta^\alpha(p) \det\left(\frac{\partial x_i^\beta}{\partial x_j^\alpha}\right) \Big|_p, \end{aligned}$$

con lo cual como se cumple $\theta^\beta(p) > 0$ y $\det\left(\frac{\partial x_i^\beta}{\partial x_j^\alpha}\right) \Big|_p > 0$, y $\theta^\alpha(p) \geq 0$, para todo $\alpha \neq \beta$, resulta $\omega_p\left(\frac{\partial}{\partial x_1^\beta}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n^\beta}\Big|_p\right) > 0$. $\square$

Ejemplo 13.5. Veamos que $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es orientable definiendo una n -forma diferenciable nunca nula en S^n . Recordar que $T_p S^n = p^\perp$, pues pensamos a S^n definida implícitamente: $S^n = f^{-1}(1)$, luego $T_p S^n = \ker(df_p)$. Para cada $p \in S^n$ consideramos

$$\omega_p(v_1, \dots, v_n) = \det(v_1, \dots, v_n, p), \quad v_i \in T_p S^n.$$

Entonces ω_p es n -lineal y alternante en cada espacio tangente $T_p S^n$. Es inmediato que $\omega_p \neq 0$, para todo $p \in S^n$. Además resulta de la definición que $\omega : p \mapsto \omega_p$, es diferenciable, o sea $\omega \in E^n(S^n)$.

Nota: para $n = 2$, $\omega_p(v_1, v_2)$ da una noción de área signada del paralelogramo generado por v_1, v_2 en el plano tangente $T_p S^2$. En efecto, esta área será el volumen del paralelepípedo en $\mathbb{R}^3$ generado por v_1, v_2, p .

Ejemplo 13.6. En general dada una subvariedad Si (M, ι) de $\mathbb{R}^{m+1}$, tal que $\dim M = m$, que tiene un campo normal unitario $\mathbf{n} : M \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$, suave tal que $\|\mathbf{n}(q)\| = 1$, y además $\mathbf{n}(q) \perp d\iota_q(T_q M) \subset T_q \mathbb{R}^n$, para todo $q \in M$, entonces la n -forma de volumen de M asociada a $\mathbf{n}$ dada por

$$\omega_p(u_1, \dots, u_n) = \det(u_1, \dots, u_n, \mathbf{n}(p)), \quad p \in M,$$

es nunca nula en M y depende diferenciablemente del punto p . Es análogo a lo que hicimos con S^n .

Ejemplo 13.7. M = el cilindro en $\mathbb{R}^3$ que es la imagen de $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por $F(s, t) = (\cos s, \sin s, t)$. En este caso definimos

$$\mathbf{n}((\cos s, \sin s, t)) = (\cos s, \sin s, 0).$$

Luego $\mathbf{n}$ es un campo suave nunca nulo normal al cilindro. Con eso ya podemos definir la 2-forma de volumen del cilindro como en los ejemplos anteriores.

14. INTEGRACIÓN EN VARIEDADES

Vamos a introducir la noción de integral de formas diferenciales en variedades. Para eso comenzamos con la integración de n -formas definidas en subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.

Recordemos que un dominio de integración en $\mathbb{R}^n$ es un subconjunto acotado $D \subset \mathbb{R}^n$, tal que $\overline{D}$ es compacto y el borde ∂D tiene medida nula. Por ejemplo un intervalo acotado en $\mathbb{R}$ es un dominio de integración. También una unión finita de rectángulos abiertos o cerrados es un dominio de integración en el plano $\mathbb{R}^2$. Poliedros y bolas sólidas en $\mathbb{R}^n$ y uniones finitas de éstos son dominios de integración.

Sea ω una n -forma suave definida en un dominio de integración compacto D , esto es,

$$\omega = f dr_1 \wedge \cdots \wedge dr_n,$$

donde $f \in C^\infty(D)$, i.e. $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, es una función suave definida en un abierto U que contiene a D . En ese caso se define la integral de ω sobre D por

$$\int_D \omega = \int_D f dV = \int_D f dr_1 \wedge \cdots \wedge dr_n := \int_D f(r_1, \dots, r_n) dr_1 \dots dr_n,$$

donde $dr_1 \dots dr_n$, es el elemento de volumen usual de $\mathbb{R}^n$, y la integral del extremo derecho de la igualdad es la integral de Riemann usual que se estudió en el curso de Análisis III.

Más generalmente dado un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, queremos definir la integral de cualquier n -forma ω con soporte compacto contenido U . Dado que tanto U como $\text{sop}(\omega)$, pueden no ser dominios de integración, tenemos la siguiente

Proposición 14.1. *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto y sea $K \subset U$ un subconjunto compacto. Entonces existe un dominio de integración D compacto tal que $K \subset D \subset U$.*

Demostración. Para cada $p \in K$, existe una bola abierta B centrada en p , tal que $\overline{B} \subset U$. Por ser compacto hay un cantidad finita de bolas $B_1, \dots, B_k$ que cubren K , cuyas clausuras están contenidas en U . Entonces $D = \overline{B}_1 \cup \cdots \cup \overline{B}_k$ es un dominio de integración compacto tal que $K \subset D \subset U$. $\square$

Luego para toda n -forma ω suave con soporte compacto contenido en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, se define

$$\int_U \omega = \int_D \omega,$$

donde D es cualquier dominio de integración tal que $\text{sop}(\omega) \subset D \subset U$.

Proposición 14.2. *La definición anterior es buena, es decir que no depende de la elección de D : si $D' \subset U$ también contiene a $\text{sop}(\omega)$ entonces $\int_U \omega = \int_{D'} \omega$.*

Demostración : la dejamos como ejercicio.

Tomando $f = 1$, obtenemos el volumen de un dominio de integración compacto $D \subset \mathbb{R}^n$:

$$\text{vol}(D) = \int_D dV = \int_D dr_1 \wedge dr_2 \wedge \cdots \wedge dr_n = \int_D dr_1 \dots dr_n.$$

Ejemplo 14.1. La n -forma de volumen canónica $dV = dr_1 \wedge dr_2 \wedge \cdots \wedge dr_n$ tiene la propiedad de ser invariante por rotaciones y traslaciones. Recordemos que una traslación $T_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, es de la forma $T_a(x) = x + a$, con $a \in \mathbb{R}^n$. Por otra parte una rotación $R_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una transformación de la forma $R_A(x) = Ax$, donde A es una matriz $n \times n$, ortogonal: $AA^t = I_n$, con $\det A = 1$.

La invariancia de dV por traslaciones y rotaciones significa que $T^*dV = dV$. O sea dado un $p \in \mathbb{R}^n$ cualquiera, T una rotación o traslación de $\mathbb{R}^n$, y $u_1, \dots, u_n \in T_p \mathbb{R}^n$, se cumple

$$dV_p(u_1, \dots, u_n) = dV_{T(p)}(dT_p u_1, \dots, dT_p u_n),$$

Como consecuencia resulta que para todo sólido $D \subset \mathbb{R}^n$ se verifica $\text{vol}(D) = \text{vol}(T(D))$, para toda traslación y toda rotación T (y para composiciones de ellas). Dejamos la comprobación como ejercicio.

Nuestro objetivo es definir la integral de una n -forma suave en una variedad. Dada una variedad diferenciable de dimensión m orientable M , una forma de volumen en M es una $\omega \in E^m(M)$ nunca nula. El par (M, ω) se llama variedad con forma de volumen. Para ciertos subconjuntos $D \subset M$ tendrá sentido definir el volumen de D por $\text{vol}(D) = \int_D \omega$.

A continuación consideramos dos casos de la definición de integral de una n -forma:

Caso 1. M es una variedad no necesariamente compacta, de dimensión n , que está orientada. Es decir existe un atlas $\mathcal{A}$ de M tal que la jacobiana de las funciones de transición tiene determinante positivo. Sea ω una m -forma en M , cuyo soporte es compacto y está contenido en U , donde $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_m))$, es un sistema coordenado en $\mathcal{A}$. O sea $\omega_U = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$, con $\text{sop}(\omega) = \text{sop}(f) \subset U$, compacto. Entonces la función $f \circ \varphi^{-1}$ tiene soporte compacto en $\varphi(U)$, por ser φ homeomorfismo. Suponemos además que $f \circ \varphi^{-1}$ es integrable (observar que esta propiedad es independiente de φ). En este caso se define la integral de ω en M por

$$(17) \quad \int_M \omega = \int_{\varphi(U)} f \circ \varphi^{-1}(r_1, \dots, r_m) dr_1 \dots dr_m.$$

Proposición 14.3. *La definición anterior no depende del sistema coordenado φ usado para definirla.*

Para la demostración de la proposición necesitamos recordar la fórmula de cambio de variables de Análisis III:

Teorema 14.4. *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto acotado y $F : U \rightarrow F(U) \subset \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo. Dada una función continua y acotada $h : F(U) \rightarrow \mathbb{R}$. Si $D \subset U$ es un dominio de integración compacto entonces se cumple*

$$(18) \quad \int_{F(D)} h = \int_D h \circ F |det(dF)|.$$

Sean $D \subset U$ y $F : U \rightarrow F(U)$, entonces dada una n -forma ω en $F(D)$, tenemos $\omega = f dr_1 \wedge \dots \wedge dr_n$. Luego

$$(19) \quad F^* \omega = (f \circ F) d(r_1 \circ F) \wedge \dots \wedge d(r_n \circ F) = (f \circ F) \cdot det(dF) dr_1 \wedge \dots \wedge dr_n.$$

De donde

$$\int_{F(D)} \omega = \int_{F(D)} f = \int_D f \circ F |det(dF)| = \pm \int_D F^* \omega,$$

donde corresponde "+" si $det(dF) > 0$, o sea si F preserva la orientación, y "-" si $det(dF) < 0$, que corresponde a cuando F cambia la orientación.

Nota: la fórmula (19) se puede probar como sigue. Sea $F^i = r_i \circ F$, la coordenada i -ésima de F , donde $(r_1, \dots, r_n)$ es el sistema de coordenadas globales en $\mathbb{R}^n$. Como consecuencia de la Proposición 12.2 obtenemos lo siguiente:

$$F^* \omega = (f \circ F) d(r_1 \circ F) \wedge \dots \wedge d(r_n \circ F) = (f \circ F) dF^1 \wedge dF^2 \wedge \dots \wedge dF^n.$$

Usando que

$$d(r_i \circ F) = dF^i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F^i}{\partial r_j} dr_j,$$

se tiene

$$F^* \omega = (f \circ F) \cdot \left(\sum_{j_1=1}^n \frac{\partial F^1}{\partial r_{j_1}} dr_{j_1} \right) \wedge \left(\sum_{j_2=1}^n \frac{\partial F^2}{\partial r_{j_2}} dr_{j_2} \right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{j_n=1}^n \frac{\partial F^n}{\partial r_{j_n}} dr_{j_n} \right),$$

donde $\omega = f dr_1 \wedge \dots \wedge dr_n$. Finalmente por las propiedades del producto $\wedge$, surge el $det(dF)$, de donde sale (19).

Demostración de la proposición. Supongamos que hay otro sistema coordenado $(V, \psi = (y_1, \dots, y_m)) \in \mathcal{A}$, tal que $\text{sop}(\omega) \subset V$. Entonces $\omega_V = g dy_1 \wedge \dots \wedge dy_m$ para alguna función g . En $U \cap V$ tenemos

$$g = \omega\left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_m}\right) = det\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right) \omega\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}\right) = det(d(\varphi \circ \psi^{-1})_\psi) f.$$

Componiendo a derecha la fórmula de arriba con ψ^{-1} , en $\psi(U \cap V)$ resulta

$$g \circ \psi^{-1} = det(d(\varphi \circ \psi^{-1})_\psi) f \circ \psi^{-1}.$$

Tomando ahora el difeomorfismo $F = \varphi \circ \psi^{-1}$, tenemos $F(\psi(U \cap V)) = \varphi(U \cap V)$. Donde por hipótesis F preserva la orientación porque $\det(dF) = \det(d(\varphi \circ \psi^{-1})) > 0$. Además si $h = f \circ \varphi^{-1}$, resulta $h \circ F = f \circ \psi^{-1}$. Aplicando el teorema de cambio de variables resulta

$$\begin{aligned} \int_{\varphi(U \cap V)} f \circ \varphi^{-1} &= \int_{\psi(U \cap V)} (h \circ F) |\det(d(\varphi \circ \psi^{-1}))| = \\ &= \int_{\psi(U \cap V)} f \circ \psi^{-1} \det(d(\varphi \circ \psi^{-1})) = \int_{\psi(U \cap V)} g \circ \psi^{-1}. \end{aligned}$$

Observar que por ser $\text{sop}(\omega) \subset U \cap V$ compacto, las integrales tienen sentido porque se realizan en dominios de integración compactos contenidos en $\varphi(U \cap V)$, y en $\psi(U \cap V)$. $\square$

Caso 2: sea M una variedad compacta de dimensión m , que está orientada por una m -forma $\omega \in E^m(M)$ nunca nula. Entonces existe un atlas $\mathcal{A}$ asociado a ω . Como M es compacta podemos suponer que $\mathcal{A}$ es finito, i.e. $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) : i = 1, \dots, n\}$.

Sea $\alpha_i, i = 1, \dots, n$ una partición de la unidad C^∞ (es suficiente que sea integrable) subordinada al cubrimiento del atlas $\mathcal{A}$: i.e. $\text{sop}(\alpha_i) \subset U_i$ es cerrado en M y por lo tanto es compacto y además α_i es integrable en U_i . Se define la integral de una m -forma $\eta \in E^m(M)$ por

$$\int_M \eta = \sum_{i=1}^n \int_M \alpha_i \eta.$$

Notar que las integrales del lado derecho ya han sido definidas en el Caso 1. Veamos la buena definición. O sea que la integral no depende del atlas que usemos para definirla.

Sea $\mathcal{B}$ otro atlas finito de M que da la misma orientación que $\mathcal{A}$, y sea $\beta_j, j = 1, \dots, l$ una partición de la unidad integrable subordinada a $\mathcal{B}$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \int_M \alpha_i \eta &= \sum_{i=1}^k \int_M \underbrace{\left(\sum_{j=1}^l \beta_j \right)}_{=1} \alpha_i \eta = \\ &= \sum_{j=1}^l \int_M \underbrace{\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \right)}_{=1} \beta_j \eta = \sum_{j=1}^l \int_M \beta_j \eta. \end{aligned}$$

Arriba hemos usado que la integral del caso 1 distribuye la suma.

Nota: no definiremos la integral de formas cuyo soporte es no necesariamente compacto.

La siguiente proposición reúne las propiedades básicas de la integral de formas y su demostración la dejamos como ejercicio.

Proposición 14.5. *Sea M una variedad orientada de dimensión m y sean β, η , m -formas en M con soporte compacto. Entonces se verifican las siguientes propiedades:*

- (a) *Linealidad:* $\int_M a\beta + b\eta = a \int_M \beta + b \int_M \eta$.
- (b) *Cambio de orientación:* $\int_{\tilde{M}} \omega = - \int_M \omega$, donde $\tilde{M}$ es la variedad M con la orientación opuesta.
- (c) *Si M es compacta y η es una forma nunca nula compatible con la orientación de M , entonces $\int_M \eta > 0$.*
- (d) *Invariancia por difeomorfismos.* Si M' es otra variedad orientada y $F : M' \rightarrow M$ es un difeomorfismo que preserve la orientación, entonces $\int_M \eta = \int_{M'} F^*(\eta)$.

Nota: en (d) de la Proposición decimos que un difeomorfismo $F : M' \rightarrow M$ preserva la orientación si el determinante de la matriz jacobiana de la expresión en coordenadas de F respecto de sistemas de coordenadas orientados en M' y en M , es positivo.

Es muy difícil en general poder calcular integrales de formas en variedades usando la definición. La siguiente proposición simplifica la tarea en muchos casos.

Un dominio de integración $D \subset M$ es un subconjunto tal que $\overline{D}$ es compacto y ∂D tiene medida nula en M .

Proposición 14.6. *Sea M una variedad compacta orientada de dimensión m y sea ω una m -forma en M . Supongamos que existen dominios de integración compactos $D_1, D_2, \dots, D_k \subset \mathbb{R}^m$ y mapas C^∞ , $F_i : D_i \rightarrow M$ tales que $E_i = F_i(D_i) \subset M$, es un dominio de integración en M , para cada i , que cumplen las siguientes condiciones:*

(i) *Para cada $1 \leq i \leq k$, $F_i : \text{Int}(D_i) \rightarrow \text{Int}(E_i)$ es un difeomorfismo que preserva la orientación.*

(ii) *$M = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k$.*

(iii) *Para cada $i \neq j$, E_i interseca a E_j , sólo en los bordes.*

Entonces

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^k \int_{D_i} F_i^*(\omega).$$

Demostración. Se puede leer en el libro de J. Lee. □

Ejemplo 14.2. Con ayuda de la proposición anterior vamos a calcular la integral de la 2-forma en la esfera S^2 dada por

$$\omega = xdy \wedge dz - ydx \wedge dz + zdx \wedge dy, \quad (x, y, z) \in S^2.$$

Observemos que ω es una 2-forma diferenciable en $\mathbb{R}^3$. Si $\iota : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es la inclusión, $\iota^*\omega$ es una 2-forma en S^2 , que por simplicidad de notación identificamos con ω .

Vamos a ver después que $\iota^*\omega$ es la llamada 2-forma de área de S^2 .

Sea $F : D = [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow S^2$ la aplicación suave dada por las coordenadas esféricas:

$$F(\phi, \theta) = (\sin(\phi) \cos(\theta), \sin(\phi) \sin(\theta), \cos(\phi)).$$

Hay que verificar que F satisface las hipótesis de la proposición anterior, i.e. que F preserva la orientación. Para eso basta ver que $\{dF(\frac{\partial}{\partial \phi}), dF(\frac{\partial}{\partial \theta})\}$ es una base orientada de $T_p S^2$ en cada punto $p \in S^2$, lo cual equivale a que

$$\{dF(\frac{\partial}{\partial \phi}), dF(\frac{\partial}{\partial \theta}), \mathbf{n}\}$$

es una base positivamente orientada de $\mathbb{R}^3$, en cada punto de S^2 , donde $\mathbf{n}$ es el vector normal unitario en S^2 que apunta hacia afuera definido por

$$\mathbf{n}(x, y, z) = (x, y, z) \in T_{(x,y,z)}^\perp S^2, \quad \forall (x, y, z) \in S^2.$$

Para ver eso observamos que

$$\begin{aligned} dF(\frac{\partial}{\partial \phi}) &= \cos \phi \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \cos \phi \sin \theta \frac{\partial}{\partial y} - \sin \phi \frac{\partial}{\partial z}, \\ dF(\frac{\partial}{\partial \theta}) &= -\sin \phi \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \phi \cos \theta \frac{\partial}{\partial y}, \\ \mathbf{n} &= \sin \phi \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \phi \sin \theta \frac{\partial}{\partial y} + \cos \phi \frac{\partial}{\partial z}, \end{aligned}$$

de esto sigue que la matriz de cambio de coordenadas entre las bases $\{dF(\frac{\partial}{\partial\phi}), dF(\frac{\partial}{\partial\theta}), \mathbf{n}\}, \{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\}$, tiene determinante positivo. De esto sigue que F preserva la orientación.

Por otra parte tenemos que

$$F^*\omega = F^*(xdy \wedge dz - ydx \wedge dz + zdx \wedge dy) = (x \circ F)F^*(dy) \wedge F^*(dz) - (y \circ F)F^*(dx) \wedge F^*(dz) + (z \circ F)F^*(dx) \wedge F^*(dy) = \sin(\phi)d\phi \wedge d\theta.$$

Además

$$\begin{aligned} F^*dx &= d(x \circ F) = d\sin(\phi)\cos(\theta) = \cos(\phi)\cos(\theta)d\phi - \sin(\phi)\sin(\theta)d\theta, \\ F^*dy &= d(y \circ F) = d\sin(\phi)\sin(\theta) = \cos(\phi)\sin(\theta)d\phi + \sin(\phi)\cos(\theta)d\theta, \\ F^*dz &= d(z \circ F) = d\cos(\phi) = -\sin(\phi)d\phi. \end{aligned}$$

Finalmente de todo lo anterior y haciendo las cuentas se llega a que $F^*\omega = \sin(\phi)d\phi \wedge d\theta$. Luego

$$\int_{S^2} \omega = \int_D F^*(\omega) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin(\phi)d\phi d\theta = 4\pi.$$

15. EL TEOREMA DE STOKES

En Análisis III ya se ha estudiado una versión del teorema de Stokes para $\mathbb{R}^3$. Vamos a dar una versión más general de este teorema para variedades y deducir el teorema de la divergencia y de Green.

Definición 15.1. Sea M una variedad de dimensión m . Un subconjunto abierto y conexo $D \subset M$ es un dominio regular si para todo $p \in \partial D = \text{borde de } D$, existe un sistema coordenado $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_m))$, que podemos suponer cúbico y centrado en p , y que está "adaptado", o sea tal que

$$\begin{aligned} U \cap D &= \{q \in U : x_m(q) > 0\}, \\ U \cap \partial D &= \{q \in U : x_m(q) = 0\}, \end{aligned}$$

O sea que el borde ∂D , está localmente definido implícitamente por $x_m = 0$, siendo $dx_m \neq 0$.

Lo que establece la definición anterior es que un dominio regular tiene su frontera definida localmente por ceros de funciones continuamente diferenciables, es decir, por trozos de hipersuperficies diferenciables en la variedad M definidas implícitamente.

Proposición 15.1. Sea M una variedad n -dimensional, y sea D un dominio regular en M . Entonces el borde ∂D es una subvariedad incrustada de M . Más aun, si M es orientable entonces ∂M es también orientable, con la orientación inducida de la de M .

Demostración. (completar detalles). El borde ∂D es cerrado en M y le damos la topología inducida. Sea $p \in \partial D$, y sea $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_m))$, un sistema coordenado adaptado alrededor de p entonces $\partial D \cap U$ es una tajada de U de dimensión $m - 1$. Luego ∂D está cubierto de sistemas adaptados. Como consecuencia del teorema de la función implícita 8.14 y su demostración resulta que ∂D es una subvariedad incrustada de M y que $\bar{\varphi} = (x_1, \dots, x_{m-1})$ restringido a $U \cap \partial D$, es un sistema coordenado local en el abierto relativo $U \cap \partial D$ del borde ∂D .

Si M es orientable, elegimos una orientación y tomamos un atlas de sistemas coordenados positivos en M , i.e. tales que la jacobiana de las funciones de transición tiene determinante positivo en las intersecciones. Esos sistemas restringidos a ∂D dan coordenadas locales como vimos antes. Haciendo la cuenta de los determinantes de las jacobianas de las funciones de transición de éstos sistemas, se comprueba que resultan positivos en las intersecciones (no lo hacemos ahora). En suma ∂D es una hipersuperficie incrustada y orientable. $\square$

Observar que el borde ∂D de un dominio regular $D \subset M$ no siempre es conexo. Tomar por ejemplo el dominio regular $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, a \leq z \leq b\}$ contenido en el cilindro $C = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1\}$.

Nota: Si $D \subset M$ es un dominio regular compacto $\bar{D}$ y M está orientada por una forma de volumen ω , se puede definir $\text{vol}(\bar{D}) = \int_{\bar{D}} \omega$, de la misma manera que definimos la integral para M compacta.

El siguiente es una de las versiones del teorema de Stokes.

Teorema 15.2. *Sea M una variedad orientada de dimensión m y sea θ una $(m-1)$ -forma diferencial en M . Si D es un dominio regular compacto en M entonces se cumple*

$$\int_D d\theta = \int_{\partial D} \iota^* \theta,$$

donde $\iota : \partial D \rightarrow M$ es la inclusión (incrustación).

La integral de la derecha tiene sentido porque el borde ∂D recibe la orientación inducida de la de M . Se demuestra, aunque no lo haremos, que en ∂D existe un campo vectorial suave $\mathbf{n}$ nunca nulo que "apunta hacia afuera de D " y que le da su orientación. En el caso particular en que $M = \mathbb{R}^n$, se puede probar la existencia de $\mathbf{n}$ como sigue.

Consideramos la n -forma de volumen $\omega \neq 0$ en $\mathbb{R}^n$, tal que $\omega(e_1, \dots, e_n) = 1$.

Lema 15.3. *Sea $V \subset \mathbb{R}^n$ un sub espacio vectorial $(n-1)$ -dimensional. Si η es una $(n-1)$ -forma no nula en V , entonces existe un único vector no nulo $N \in V^\perp$ tal que*

$$\eta(v_1, \dots, v_{n-1}) = \omega(N, v_1, \dots, v_{n-1}), \quad \forall v_1, \dots, v_{n-1} \in V.$$

Demostración. Dado $v \in \mathbb{R}^n$. Entonces $\omega(v, -, \dots, -)$ es una $(n-1)$ -forma en V , (donde los lugares vacíos se llenan con vectores de V). Entonces existe un $t(v) \in \mathbb{R}$ tal que $\omega(v, -, \dots, -) = t(v)\eta(-, \dots, -)$. Observar que $t(v) = 0$, para todo $v \in V$.

Como $\omega \neq 0$, existe un $v_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $t(v_0) \neq 0$ y por lo tanto $v_0 \notin V$. Descomponiendo $v_0 = v_1 + u_0$, con $v_1 \in V$, $u_0 \in V^\perp$, tenemos

$$\omega(v_0, -, \dots, -) = \omega(v_1, -, \dots, -) + \omega(u_0, -, \dots, -) = \omega(u_0, -, \dots, -) = t(v_0)\eta(-, \dots, -).$$

Finalmente el vector $N = \frac{1}{t(v_0)}u_0$, satisface las condiciones deseadas. $\square$

Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un dominio regular y sea η la $(n-1)$ -forma continua (resp. suave) nunca nula en ∂D que le da su orientación. Dado $p \in \partial D$, por el lema anterior existe un único vector $0 \neq N_p \in T_p^\perp \partial D$, tal que

$$\eta_p(v_1, \dots, v_{n-1}) = \omega(N(p), v_1, \dots, v_{n-1}), \quad \forall v_1, \dots, v_{n-1} \in T_p \partial D.$$

La aplicación $N : p \mapsto N_p \in T_p^\perp \mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^n$, define un campo normal nunca nulo en el borde ∂D que es continuo (resp suave) si ω es continua (resp. suave). Dividiendo por la norma de N en cada punto se obtiene el (único) campo unitario normal que apunta hacia afuera (si no, se invierte la orientación) con el cual se orienta ∂D .

Ejemplo 15.1. Con algunas convenciones el Teorema fundamental del cálculo de una variable es un caso particular: $M = \mathbb{R}$, $D = [a, b]$, $\partial D = \{a, b\}$ (variedad de dimensión cero). Dada $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, ella define una 0-forma en M . Entonces por el Teorema de Stokes resulta

$$\int_{[a,b]} df = \int_{\{a,b\}} f,$$

o sea $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$. La orientación en $\partial D = \{a, b\}$ está dada por la figura.

15.1. Teorema de la divergencia en $\mathbb{R}^3$. Recordar que si $X = (a, b, c)$ es un campo en $\mathbb{R}^3$, la divergencia de X es la función C^∞ :

$$\operatorname{div} X = a_x + b_y + c_z.$$

Teorema 15.4. Sea $D \subset \mathbb{R}^3$ un dominio regular compacto y sea $X \in \chi(U)$, donde $U \subset \mathbb{R}^3$ es un abierto que contiene a D . Sea $\mathbf{n} : \partial D \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo normal exterior unitario en ∂D que apunta hacia afuera (ver figura), y sea dA la forma de área canónica de ∂D , dada por

$$dA_p(u, v) = \det(u, v, \mathbf{n}(p)), \quad u, v \in T_p(\partial D), \quad \forall p \in \partial D.$$

Entonces

$$\int_D \operatorname{div}(X) dV = \int_{\partial D} \langle X, \mathbf{n} \rangle dA.$$

Demostración. Escribimos el campo $X = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} + c \frac{\partial}{\partial z}$, donde a, b, c son funciones diferenciables en $U \subset \mathbb{R}^3$. La 2-forma $\omega \in E^2(U)$ dada por:

$$\omega = a dy \wedge dz + b dz \wedge dx + c dx \wedge dy,$$

satisface

$$\begin{aligned} d\omega &= a_x dx \wedge dy \wedge dz + b_y dy \wedge dz \wedge dx + c_z dz \wedge dx \wedge dy = \\ &= (a_x + b_y + c_z) dx \wedge dy \wedge dz = \operatorname{div}(X) dV. \end{aligned}$$

Por otra parte de la definición de dA desarrollando el determinante respecto de la última fila, donde $\mathbf{n} = (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)$, tenemos lo siguiente:

$$dA(u, v) = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \mathbf{n}_1 & \mathbf{n}_2 & \mathbf{n}_3 \end{pmatrix} =$$

$$\mathbf{n}_1(u_2 v_3 - u_3 v_2) - \mathbf{n}_2(u_1 v_3 - u_3 v_1) + \mathbf{n}_3(u_1 v_2 - u_2 v_1) =$$

$$(\mathbf{n}_1 dy \wedge dz - \mathbf{n}_2 dx \wedge dz + \mathbf{n}_3 dx \wedge dy)(u, v).$$

Recordar por ejemplo que $dx \wedge dz(u, v) = u_1 v_3 - u_3 v_1$, y los otros son análogos. Luego $dA = \mathbf{n}_1 dy \wedge dz - \mathbf{n}_2 dx \wedge dz + \mathbf{n}_3 dx \wedge dy$. De esto resulta usando las propiedades del producto cruz que

$$dA(u, v) = \langle u \times v, \mathbf{n} \rangle.$$

Además existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $u \times v = c \mathbf{n}_p$, para todo par de vectores tangentes $u, v \in T_p \partial D$. Luego haciendo la cuenta se ve que $c = dA_p(u, v)$, o sea

$$u \times v = dA(u, v) \mathbf{n}.$$

Entonces

$$\langle X, \mathbf{n} \rangle dA(u, v) = \langle X, \mathbf{n} \cdot dA(u, v) \rangle = \langle X, u \times v \rangle = (\iota^* \omega)(u, v),$$

de donde resulta $(\iota^* \omega)_p = \langle X_p, \mathbf{n}_p \rangle dA_p$, para todo $p \in \partial D$. Finalmente aplicando el teorema de

Stokes a ω tenemos

$$\int_{\partial D} \langle X, \mathbf{n} \rangle dA = \int_{\partial D} \iota^* \omega = \int_D d\omega = \int_D \operatorname{div} X dV.$$

□

Ejemplo 15.2. Una aplicación inmediata de Stokes es calcular el volumen de una bola sólida B de radio $r = 1$ en $\mathbb{R}^3$. Suponemos la bola centrada en $(0, 0, 0)$ y sea el campo suave $X(x, y, z) = (x, y, z)$. Entonces $\operatorname{div}(X) = 3$. Además X restringido al borde $\partial B = S^2$ es el vector normal exterior unitario $\mathbf{n}$ que da la orientación de S^2 . Luego por el teorema de la divergencia resulta

$$3 \int_B dV = 3 \operatorname{Vol}(B) = \int_{S^2} \langle X, \mathbf{n} \rangle dA = \int_{S^2} dA = \operatorname{Area}(S^2) = 4\pi.$$

Luego resulta $\operatorname{Vol}(B) = \frac{4}{3}\pi$.

Ejercicio 15.1. Calcular la integral $\int_{S^2} n_x dA$, donde n_x es la proyección del vector normal unitario exterior $\mathbf{n}$ sobre el eje x .

Teorema 15.5. de Green. Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio regular compacto y sean $p, q : U \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones C^∞ , donde U es un abierto que contiene a D . Entonces se cumple

$$\int_D (q_x - p_y) dx dy = \int_{\partial D} p dx + q dy.$$

Demostración. Sea $\omega = p dx + q dy$. Entonces $d\omega = (q_x - p_y) dx \wedge dy$. □

Nota: tanto el teorema de Stokes como el de la divergencia se cumplen para dominios D compacto tales que ∂D es una unión finita de (hiper) superficies orientadas (ver figura). Por ejemplo D podría ser un cilindro sólido en $\mathbb{R}^3$. Entonces ∂D es unión de un cilindro y de dos tapas. Sobre los bordes que los unen el vector normal exterior no está definido. Lo mismo vale para el Teorema de Green.

C.I.E.M. FA.M.A.F. UNC

Email address: eduardo.hulett@unc.edu.ar, ed.hulett@gmail.com