

Cálculo Superior

Período | 2026-I

Práctico 1

Ejercicio 1

Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(u, v) = (u^2 e^{2v}, u + v^2)$. Calcular $\frac{\partial f}{\partial v}$ y $(df)_{(3,0)}$. Escribir la aproximación afín de f en $(3, 0)$ y usarla para aproximar $f(3.1, 0.2)$.

Ejercicio 2

- Sea $u_o \in \mathbb{R}^m$ y $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida por $g(p) = u_o$. Mostrar que $(dg)_p$ es la transformación lineal nula.
- Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Mostrar que $(df)_p = f$ para todo $p \in \mathbb{R}^n$.

Ejercicio 3

Mostrar que si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una función diferenciable, entonces $(df)_p(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 f(\alpha(t))$ para cualquier curva α con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$.

Ejercicio 4

[Teorema de la función homogénea de Euler] Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función homogénea de orden k . Mostrar que $\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = kf$.

Ejercicio 5

- Sean $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\text{tr} : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones *determinante* y *traza*, respectivamente. Mostrar que

$$(d\det)_X Y = \langle \text{cof}(X), Y \rangle = \text{tr}(\text{cof}(X)^t Y) = \text{tr}(\text{adj}(X)Y),$$
 donde $\text{cof}(X)$ es la *matriz de cofactores* de X y $\text{adj}(X)$ es la *matriz adjunta* de X .
 [Hint: Usar la Expansión de Laplace del determinante]
- Sea X una matriz $n \times n$ con coeficientes reales. Mostrar que $(d\det)_X$ es la transformación lineal nula si y solo si su *rank* es menor o igual que $n - 2$.

Ejercicio 6

[Derivando nuevamente el determinante]: Mostrar que $(d\det)_{\text{id}} Y = \text{tr}(Y)$ para toda matriz Y de orden $n \times n$ y deducir que para toda matriz invertible X (es decir, $X \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$), se tiene

$$(d\det)_X Y = \det(X) \text{tr}(X^{-1}Y).$$

Ejercicio 7

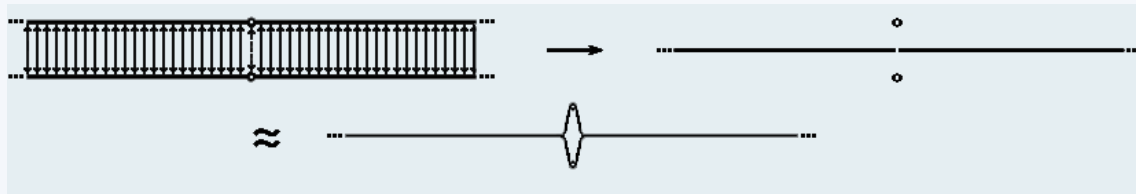
Sea $(-\epsilon, \epsilon) \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto. Sean $T : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ una curva suave de transformaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ y $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva suave de vectores de $\mathbb{R}^n$. Definir $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^m$ por $\beta(t) = A(t)(\alpha(t))$. Probar que β es suave y que para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ se cumple

$$\beta'(t) = A'(t)(\alpha(t)) + A(t)(\alpha'(t)).$$



Ejercicio 8

- Mostrar que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ no es un espacio topológico localmente euclídeo.
- Sea X el cociente $(\mathbb{R} \times \{0, 1\}) / \sim$ de dos copias de $\mathbb{R}$, donde $(x, 0) \sim (x, 1)$ para $x \neq 0$ (y cada punto está relacionado consigo mismo, por supuesto). Mostrar que X es un espacio topológico tal que todo punto tiene un entorno abierto homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}$, pero no es Hausdorff.



Ejercicio 9

Considerar sobre $\mathbb{R}$ su topología usual y la relación de equivalencia $x \sim y$ si y solo si $x = y$ o $\{x, y\} \subseteq \mathbb{Z}$. Sea $X = \mathbb{R} / \sim$ y considerar sobre este la *topología cociente*. Mostrar que la proyección canónica $\pi : \mathbb{R} \rightarrow X$ no es una aplicación abierta.

Ejercicio 10

Mostrar que para todo punto p de una variedad diferenciable de dimensión n existe un sistema coordenado (U, ϕ) tal que $\phi(p) = 0$ y $\phi(U) = \mathbb{R}^n$.

Ejercicio 11

Un *espacio vectorial topológico* sobre $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial real V dotado con una topología τ la cual es compatible con la estructura de espacio vectorial de V ; es decir, las operaciones *suma* $+: V \times V \rightarrow V$ y *multiplicación escalar* $\star: \mathbb{R} \times V \rightarrow V$ son funciones continuas, donde se ha considerado sobre $\mathbb{R}$ su topología usual, en V se tiene la topología τ , y $V \times V$ y $\mathbb{R} \times V$ tienen la topología producto.

Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita. Se puede probar que existe una única topología τ tal que (V, τ) es un espacio vectorial real topológico Hausdorff (Teorema de Tychonoff sobre E.V.T.)

- Sean $\mathfrak{B}_1 := \{v_1, \dots, v_n\}$ y $\mathfrak{B}_2 := \{u_1, \dots, u_n\}$ bases de V , y sean $\varphi_{\mathfrak{B}_1}, \psi_{\mathfrak{B}_2} : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ las funciones dadas por $\varphi_{\mathfrak{B}_1}(\sum t_i v_i) = (t_1, \dots, t_n)$ y $\psi_{\mathfrak{B}_2}(\sum s_j u_j) = (s_1, \dots, s_n)$. Mostrar que tanto $\varphi_{\mathfrak{B}_1}$ como $\psi_{\mathfrak{B}_2}$ son homeomorfismos de (V, τ) con $\mathbb{R}^n$.
- Mostrar que $\{(V, \varphi_{\mathfrak{B}_1})\}$ y $\{(V, \psi_{\mathfrak{B}_2})\}$ son atlas sobre V y determinan la misma estructura diferenciable.

Ejercicio 12

Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función C^∞ . Dotar el gráfico de f

$$\Gamma(f) := \{(x, f(x)) : x \in U\}$$

con una estructura de variedad diferenciable.

Ejercicio 13

Sean $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$ y $\{V_\beta, \psi_\beta\}$ atlas C^∞ de variedades diferenciables M y N respectivamente. Mostrar que la familia $\{(U_\alpha \times V_\beta, (\phi_\alpha, \psi_\beta))\}$ es un atlas de $M \times N$, y por lo tanto $M \times N$ es una variedad diferenciable llamada *variedad producto*.

Ejercicio 14

Identificando $\mathbb{R}^2$ con los números complejos $\mathbb{C}$, se puede pensar al círculo unidad $\mathbb{S}^1$ como un subconjunto del plano complejo. Una *función ángulo* sobre un subconjunto $A \subseteq \mathbb{S}^1$ es una función continua $\theta : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ tal

que $\exp(i\theta(z)) = z$ para todo $z \in U$.

Sea $U \subseteq \mathbb{S}^1$ un conjunto abierto. Mostrar que existe una función ángulo sobre U si y solo si $U \neq \mathbb{S}^1$, y mostrar también que si $\theta : U \neq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función ángulo, entonces (U, θ) es una carta suave para $\mathbb{S}^1$ con su estructura suave estándar.

Ejercicio 15

- Sea $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$. Mostrar que las estructuras diferenciables que contienen las cartas “casquetes” y las cartas “estereográficas” coinciden.
- Mostrar que $\mathbb{S}^2$ con la estructura diferenciable dada en el punto anterior es difeomorfa a $(M, \mathcal{F})$, donde M es la compactificación de los números complejos $\mathbb{C}$ por el punto ∞ , y $\mathcal{F}$ es la estructura diferenciable que contiene las cartas (U, ϕ) y (V, ψ) , donde $U = \mathbb{C}$, $\phi = \text{id}$, $V = (\mathbb{C} - \{0\}) \cup \{\infty\}$, y $\psi(z) = 1/z$ si $z \in \mathbb{C} - \{0\}$, $\psi(\infty) = 0$ (hemos identificado $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ de la manera usual).

Ejercicio 16

Sea M el cilindro infinito; $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$. Cubrir a M con una sola carta.

Ejercicio 17

Sea M una variedad compacta y conexa. ¿Puede ser M cubierta por una sola carta?

Ejercicio 18

Considerar el cociente $\mathbb{RP}^2 = \mathbb{S}^2 / \sim$ dado por la relación de equivalencia $\sim$ sobre $\mathbb{S}^2$ definida por $x \sim x$ o $x \sim -x$. Mostrar que existe una única estructura diferenciable en $\mathbb{RP}^2$ tal que la proyección canónica es un difeomorfismo local.

Ejercicio 19

Sea $\sim$ la relación de equivalencia en $\mathbb{R}^2$ dada por $x \sim y$ si $x - y \in \mathbb{Z}^2$. Considerar en el cociente $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / \sim$ la única estructura diferenciable tal que la proyección es un difeomorfismo local. Mostrar que $\mathbb{T}^2$ es difeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ provisto de la estructura diferenciable producto.

Ejercicio 20

Considerar en $\mathbb{R}$ las estructuras diferenciables $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ que contienen respectivamente los sistemas coordenados $(\mathbb{R}, \text{id})$ y $(\mathbb{R}, t \mapsto t^3)$. Mostrar que son difeomorfas pero $\mathcal{F} \neq \mathcal{F}'$.

Ejercicio 21

Denotemos por $M(m \times n, \mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices de tamaño $m \times n$ con coeficientes reales. Dado $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, denotemos por $M_k(m \times n, \mathbb{R})$ al subconjunto de $M(m \times n, \mathbb{R})$ formado por aquellas matrices que tienen rango k .

Considerar sobre $M_1(2 \times 2, \mathbb{R})$ la topología heredada de la topología usual de $M(2 \times 2, \mathbb{R})$. Para $i = 1, 2$, definir los conjuntos $U_i := \{X \in M_1(2 \times 2, \mathbb{R}) : \text{fila } i \text{ de } X \text{ es no nula}\}$ y las funciones $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^3$ dadas por

$$\varphi_i(X) = (\text{fila } i \text{ de } X, \langle \text{fila 1 de } X, \text{fila 2 de } X \rangle)$$

donde hemos identificado las filas de X con pares ordenados de $\mathbb{R}^2$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno canónico de $\mathbb{R}^2$.

Mostrar que cada conjunto U_i es un abierto de $M_1(2 \times 2, \mathbb{R})$ y que cada función φ_i es un homeomorfismo entre U_i y un abierto de $\mathbb{R}^3$. Comprobar que $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1,2}$ es un atlas sobre $M_1(2 \times 2, \mathbb{R})$ ^a

^aProbaremos mas adelante que $M_k(m \times n, \mathbb{R})$, con $0 \leq k \leq \min\{m, n\}$, tiene una estructura natural de variedad diferenciable de dimensión $k(m + n - k)$

Ejercicio 22

Sean $m, n \in \mathbb{N}$, con $m < n$, y sea $M_m(m \times n, \mathbb{R})$ el subconjunto de las matrices $M(m \times n, \mathbb{R})$ de rango igual a m . Dar a $M_m(m \times n, \mathbb{R})$ una estructura de variedad diferenciable.

Ejercicio 23

Considerar en $\mathbb{C}$ la relación de equivalencia $\sim$ dada por $x \sim e^{i2k\pi/3}x$, $k = 0, 1, 2$. Mostrar que $\mathbb{C}/\sim$ es localmente euclídeo de dimensión 2, que admite estructura diferenciable, pero que no admite ninguna estructura diferenciable tal que la proyección sea un difeomorfismo local.

Ejercicio 24

Sea $M_1 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ con la estructura diferenciable producto, y sea M_2 la variedad diferenciable del Ejercicio del cilindro infinito. ¿Puede probar que M_1 y M_2 son difeomorfas?

Ejercicio 25

Mostrar que el cilindro $C = \mathbb{R}^2/\sim$, donde $z \sim z + 2k\pi e_1$, con k entero, admite una única estructura diferenciable tal que la proyección canónica es un difeomorfismo local. Probar que es difeomorfo a cada una de las siguientes variedades diferenciables:

- la variedad producto $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$,
- $\mathbb{R}^2 - \{0\}$,
- la superficie de $\mathbb{R}^3$ cuya construcción es análoga a la de la banda de Moebius a partir de una cinta, pero dando una vuelta entera, en vez de media vuelta, antes de pegar.

Ejercicio 26

Dar estructura de variedad diferenciable a los siguientes conjuntos:

- $M := \{(v, w) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : \|v\| = 1, \|w\| = 1 \text{ y } \langle v, w \rangle = 0\}$
- el conjunto de todos los prismas en $\mathbb{R}^3$ de lados paralelos a los ejes y con volumen unitario,
- el conjunto de todos los planos punteados orientados en $\mathbb{R}^3$,
- el conjunto de todas las rectas orientadas en el plano.

Versión para imprimir

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(u, v) = (u^2 e^{2v}, u + v^2)$. Calcular $\frac{\partial f}{\partial v}$ y $(df)_{(3,0)}$. Escribir la aproximación afín de f en $(3, 0)$ y usarla para aproximar $f(3.1, 0.2)$.
2.
 - Sea $u_o \in \mathbb{R}^m$ y $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida por $g(p) = u_o$. Mostrar que $(dg)_p$ es la transformación lineal nula.
 - Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Mostrar que $(df)_p = f$ para todo $p \in \mathbb{R}^n$.
3. Mostrar que si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una función diferenciable, entonces $(df)_p(v) = \frac{d}{dt}\big|_0 f(\alpha(t))$ para cualquier curva α con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$.
4. [Teorema de la función homogénea de Euler] Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función homogénea de orden k . Mostrar que $\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = kf$.
5.
 - Sean $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\text{tr} : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones *determinante* y *traza*, respectivamente. Mostrar que

$$(d\det)_X Y = \langle \text{cof}(X), Y \rangle = \text{tr}(\text{cof}(X)^t Y) = \text{tr}(\text{adj}(X)Y),$$

donde $\text{cof}(X)$ es la *matriz de cofactores* de X y $\text{adj}(X)$ es la *matriz adjunta* de X .

[Hint: Usar la Expansión de Laplace del determinante]

- Sea X una matriz $n \times n$ con coeficientes reales. Mostrar que $(d\det)_X$ es la transformación lineal nula si y solo si su *rango* es menor o igual que $n - 2$.
6. [Derivando nuevamente el determinante]: Mostrar que $(d\det)_{\text{id}} Y = \text{tr}(Y)$ para toda matrix Y de orden $n \times n$ y deducir que para toda matriz invertible X (es decir, $X \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$), se tiene

$$(d\det)_X Y = \det(X) \text{tr}(X^{-1}Y).$$

7. Sea $(-\epsilon, \epsilon) \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto. Sean $T : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ una curva suave de transformaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ y $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva suave de vectores de $\mathbb{R}^n$. Definir $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^m$ por $\beta(t) = A(t)(\alpha(t))$. Probar que β es suave y que para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ se cumple

$$\beta'(t) = A'(t)(\alpha(t)) + A(t)(\alpha'(t)).$$

8.
 - Mostrar que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ no es un espacio topológico localmente euclídeo.
 - Sea X el cociente $(\mathbb{R} \times \{0, 1\}) / \sim$ de dos copias de $\mathbb{R}$, donde $(x, 0) \sim (x, 1)$ para $x \neq 0$ (y cada punto está relacionado consigo mismo, por supuesto). Mostrar que X es un espacio topológico tal que todo punto tiene un entorno abierto homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}$, pero no es Hausdorff.
9. Considerar sobre $\mathbb{R}$ su topología usual y la relación de equivalencia $x \sim y$ si y solo si $x = y$ o $\{x, y\} \subseteq \mathbb{Z}$. Sea $X = \mathbb{R} / \sim$ y considerar sobre este la *topología cociente*. Mostrar que la proyección canónica $\pi : \mathbb{R} \rightarrow X$ no es una aplicación abierta.
10. Mostrar que para todo punto p de una variedad diferenciable de dimensión n existe un sistema coordenado (U, ϕ) tal que $\phi(p) = 0$ y $\phi(U) = \mathbb{R}^n$.
11. Un *espacio vectorial topológico* sobre $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial real V dotado con una topología τ la cual es compatible con la estructura de espacio vectorial de V ; es decir, las operaciones *suma* $+: V \times V \rightarrow V$ y *multiplicación escalar* $\star : \mathbb{R} \times V \rightarrow V$ son funciones continuas, donde se ha considerado sobre $\mathbb{R}$ su topología usual, en V se tiene la topología τ , y $V \times V$ y $\mathbb{R} \times V$ tienen la topología producto.

Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita. Se puede probar que existe una única topología τ tal que (V, τ) es un espacio vectorial real topológico Hausdorff (Teorema de Tychonoff sobre E.V.T.)

- Sean $\mathfrak{B}_1 := \{v_1, \dots, v_n\}$ y $\mathfrak{B}_2 := \{u_1, \dots, u_n\}$ bases de V , y sean $\varphi_{\mathfrak{B}_1}, \psi_{\mathfrak{B}_2} : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ las funciones dadas por $\varphi_{\mathfrak{B}_1}(\sum t_i v_i) = (t_1, \dots, t_n)$ y $\psi_{\mathfrak{B}_2}(\sum s_j u_j) = (s_1, \dots, s_n)$. Mostrar que tanto $\varphi_{\mathfrak{B}_1}$ como $\psi_{\mathfrak{B}_2}$ son homeomorfismos de (V, τ) con $\mathbb{R}^n$.
 - Mostrar que $\{(V, \varphi_{\mathfrak{B}_1})\}$ y $\{(V, \psi_{\mathfrak{B}_2})\}$ son atlas sobre V y determinan la misma estructura diferenciable.
12. Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función $\mathbf{C}^\infty$. Dotar el gráfico de f

$$\Gamma(f) := \{(x, f(x)) : x \in U\}$$

con una estructura de variedad diferenciable.

13. Sean $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$ y $\{V_\beta, \psi_\beta\}$ atlas $\mathbf{C}^\infty$ de variedades diferenciables M y N respectivamente. Mostrar que la familia $\{(U_\alpha \times V_\beta, (\phi_\alpha, \psi_\beta))\}$ es un atlas de $M \times N$, y por lo tanto $M \times N$ es una variedad diferenciable llamada *variedad producto*.

14. Identificando $\mathbb{R}^2$ con los números complejos $\mathbb{C}$, se puede pensar al círculo unidad $\mathbb{S}^1$ como un subconjunto del plano complejo. Una *función ángulo* sobre un subconjunto $A \subseteq \mathbb{S}^1$ es una función continua $\theta : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\exp(i\theta(z)) = z$ para todo $z \in U$.

Sea $U \subseteq \mathbb{S}^1$ un conjunto abierto. Mostrar que existe una función ángulo sobre U si y solo si $U \neq \mathbb{S}^1$, y mostrar también que si $\theta : U \neq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función ángulo, entonces (U, θ) es una carta suave para $\mathbb{S}^1$ con su estructura suave estándar.

15. • Sea $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$. Mostrar que las estructuras diferenciables que contienen las cartas “casquetes” y las cartas “estereográficas” coinciden.
• Mostrar que $\mathbb{S}^2$ con la estructura diferenciable dada en el punto anterior es difeomorfa a $(M, \mathcal{F})$, donde M es la compactificación de los números complejos $\mathbb{C}$ por el punto ∞ , y $\mathcal{F}$ es la estructura diferenciable que contiene las cartas (U, ϕ) y (V, ψ) , donde $U = \mathbb{C}$, $\phi = \text{id}$, $V = (\mathbb{C} - \{0\}) \cup \{\infty\}$, y $\psi(z) = 1/z$ si $z \in \mathbb{C} - \{0\}$, $\psi(\infty) = 0$ (hemos identificado $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ de la manera usual).

16. Sea M el *cilindro infinito*; $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$. Cubrir a M con una sola carta.

17. Sea M una variedad compacta y conexa. ¿Puede ser M cubierta por una sola carta?

18. Considerar el cociente $\mathbb{RP}^2 = \mathbb{S}^2 / \sim$ dado por la relación de equivalencia $\sim$ sobre $\mathbb{S}^2$ definida por $x \sim x$ o $x \sim -x$. Mostrar que existe una única estructura diferenciable en $\mathbb{RP}^2$ tal que la proyección canónica es un difeomorfismo local.

19. Sea $\sim$ la relación de equivalencia en $\mathbb{R}^2$ dada por $x \sim y$ si $x - y \in \mathbb{Z}^2$. Considerar en el cociente $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / \sim$ la única estructura diferenciable tal que la proyección es un difeomorfismo local. Mostrar que $\mathbb{T}^2$ es difeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ provisto de la estructura diferenciable producto.

20. Considerar en $\mathbb{R}$ las estructuras diferenciables $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ que contienen respectivamente los sistemas coordenados $(\mathbb{R}, \text{id})$ y $(\mathbb{R}, t \mapsto t^3)$. Mostrar que son difeomorfos pero $\mathcal{F} \neq \mathcal{F}'$.

21. Denotemos por $M(m \times n, \mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices de tamaño $m \times n$ con coeficientes reales. Dado $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, denotemos por $M_k(m \times n, \mathbb{R})$ al subconjunto de $M(m \times n, \mathbb{R})$ formado por aquellas matrices que tienen rango k .

Considerar sobre $M_1(2 \times 2, \mathbb{R})$ la *topología heredada* de la topología usual de $M(2 \times 2, \mathbb{R})$. Para $i = 1, 2$, definir los conjuntos $U_i := \{X \in M_1(2 \times 2, \mathbb{R}) : \text{fila } i \text{ de } X \text{ es no nula}\}$ y las funciones $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^3$ dadas por

$$\varphi_i(X) = (\text{fila } i \text{ de } X, \langle \text{fila 1 de } X, \text{fila 2 de } X \rangle)$$

donde hemos identificado las filas de X con pares ordenados de $\mathbb{R}^2$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno canónico de $\mathbb{R}^2$.

Mostrar que cada conjunto U_i es un abierto de $M_1(2 \times 2, \mathbb{R})$ y que cada función φ_i es un homeomorfismo entre U_i y un abierto de $\mathbb{R}^3$. Comprobar que $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1,2}$ es un atlas sobre $M_1(2 \times 2, \mathbb{R})$ ¹

22. Sean $m, n \in \mathbb{N}$, con $m < n$, y sea $M_m(m \times n, \mathbb{R})$ el subconjunto de las matrices $M(m \times n, \mathbb{R})$ de rango igual a m . Dar a $M_m(m \times n, \mathbb{R})$ una estructura de variedad diferenciable.

23. Considerar en $\mathbb{C}$ la relación de equivalencia $\sim$ dada por $x \sim e^{i2k\pi/3}x$, $k = 0, 1, 2$. Mostrar que $\mathbb{C}/\sim$ es localmente euclídeo de dimensión 2, que admite estructura diferenciable, pero que no admite ninguna estructura diferenciable tal que la proyección sea un difeomorfismo local.

24. Sea $M_1 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ con la estructura diferenciable producto, y sea M_2 la variedad diferenciable del Ejercicio 16. ¿Puede probar que M_1 y M_2 son difeomorfas?

25. Mostrar que el cilindro $C = \mathbb{R}^2 / \sim$, donde $z \sim z + 2k\pi e_1$, con k entero, admite una única estructura diferenciable tal que la proyección canónica es un difeomorfismo local. Probar que es difeomorfo a cada una de las siguientes variedades diferenciables:

- la variedad producto $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$,
- $\mathbb{R}^2 - \{0\}$,
- la superficie de $\mathbb{R}^3$ cuya construcción es análoga a la de la banda de Moebius a partir de una cinta, pero dando una vuelta entera, en vez de media vuelta, antes de pegar.

26. Dar estructura de variedad diferenciable a los siguientes conjuntos:

- $M := \{(v, w) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : \|v\| = 1, \|w\| = 1 \text{ y } \langle v, w \rangle = 0\}$
- el conjunto de todos los prismas en $\mathbb{R}^3$ de lados paralelos a los ejes y con volumen unitario,
- el conjunto de todos los planos punteados orientados en $\mathbb{R}^3$,
- el conjunto de todas las rectas orientadas en el plano.

¹Probaremos mas adelante que $M_k(m \times n, \mathbb{R})$, con $0 \leq k \leq \min\{m, n\}$, tiene una estructura natural de variedad diferenciable de dimensión $k(m + n - k)$