

EL ELIPSOIDE

Cátedra de Geodesia y Astronomía de posición

23 de junio de 2026

1. El elipsoide de revolución

Para los siguientes cálculos vamos a trabajar con la geometría de un elipsoide de revolución, formado mediante la rotación alrededor de su semieje menor.

Consideramos el elipsoide que se muestra en la Figura 1.

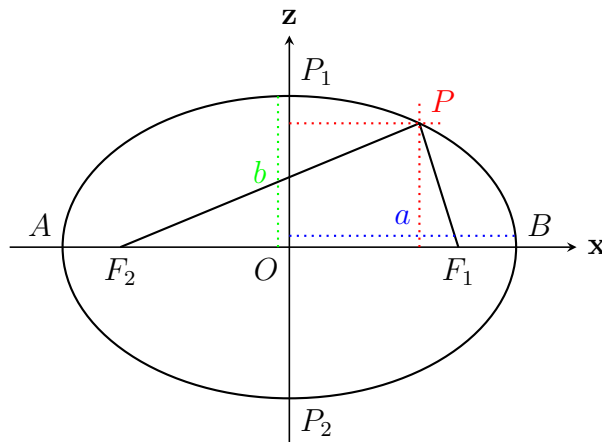


Figura 1: Elipse de referencia.

En la figura tenemos:

- F_1, F_2 , focos de la elipse.
- O , centro de la elipse.
- $\bar{OA} = \bar{OB} = a =$ semieje mayor de la elipse.
- $\bar{OP}_1 = \bar{OP}_2 = b =$ semieje menor de la elipse.
- $P_1\bar{P}_2$ es el eje menor de la elipse, mientras que P es un punto arbitrario en la elipse.

De la definición de una elipse, el movimiento de P sobre la elipse produce una suma constante de las distancias tomadas desde dos puntos fijos, denominados focos. La ecuación que representa a esta elipse es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

Haciendo coincidir P con P_1 , se verifica que $F_1P = F_2P = a$. Gráficamente: Algunos pará-

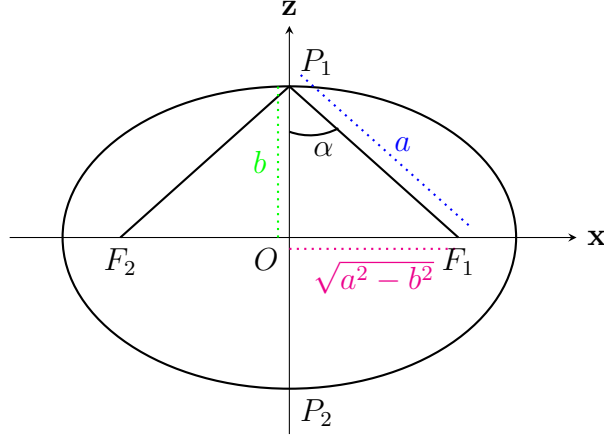


Figura 2: Elementos de la elipse para un punto $P = P_1$.

metros importantes de la elipse son:

- Achatamiento polar, f :

$$f = \frac{a - b}{a} \quad (2)$$

- La primera excentricidad, e :

$$e = \frac{OF_1}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}; e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad (3)$$

- La segunda excentricidad, e' :

$$e' = \frac{OF_1}{b} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}; e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} \quad (4)$$

- Excentricidad angular, α (ver Figura 2); es el ángulo en P_1 entre el semieje menor y la línea dibujada desde P hasta F_1 o F_2 . Se obtiene:

$$\cos(\alpha) = \frac{b}{a} = 1 - f \quad (5)$$

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{OF_1}{a} = e \quad (6)$$

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{OF_1}{b} = e' \quad (7)$$

- Excentricidad lineal, E :

$$E = ae \quad (8)$$

2. Latitud Geodésica φ , Latitud Reducida β y Latitud Geocéntrica ψ

Consideramos primero un elipsoide de revolución cuyo centro está en O . Definimos el eje $\bar{OZ}$ como el eje de rotación del elipsoide. El eje $\bar{OX}$ se subtiende en el plano ecuatorial e intercepta el meridiano P_1EP_2 , el cual es tomado como el meridiano de origen o Meridiano de Greenwich desde donde las longitudes serán medidas. El eje $\bar{OY}$ está en el plano ecuatorial, perpendicular al eje $\bar{OX}$ tal que $\bar{OX}$, $\bar{OY}$, $\bar{OZ}$ forman un sistema coordenado de mano derecha como se muestra en la Figura 3.

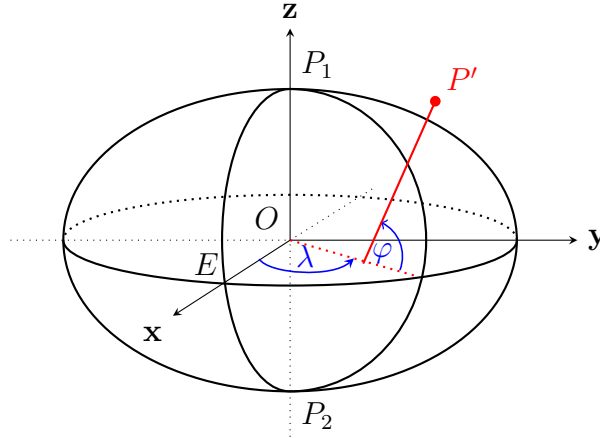


Figura 3: Sistema de coordenadas para el Elipsoide.

Un punto arbitrario P (dentro o fuera de la superficie del elipsoide) puede ser definido entonces por sus coordenadas x, y, z .

Sobre un meridiano cualquiera, tal como P_1PP_2 o P_1EP_2 , la longitud es una constante para cualquier punto localizado en este plano meridiano. La longitud geodésica λ de un punto es definida como el ángulo diedro entre los planos del meridiano de origen P_1EP_2 y un meridiano que está pasando a través del punto dado (ejemplo P_1PP_2). Las longitudes pueden medir entre $[0^\circ, 360^\circ]$ o $[-180^\circ, 180^\circ]$, siendo negativas hacia el Oeste del meridiano de origen y positivas hacia el Este de dicho meridiano.

La latitud geodésica φ de un punto ubicado sobre la superficie del elipsoide, es definida como el ángulo entre la normal al elipsoide en el punto P y el plano ecuatorial. Puede tomar valores entre $[-90^\circ, 90^\circ]$, siendo cero en el Ecuador, positivas hacia el Polo Norte (P_1) y negativas hacia el Polo Sur (P_2).

Además de la latitud geodésica podemos definir la latitud reducida β , también llamada paramétrica, y la latitud geocéntrica ψ . Para la definición de la latitud reducida se debe utilizar una esfera tangente al elipsoide a lo largo del Ecuador, y un punto P' ubicado sobre la esfera originado por una línea perpendicular al plano del Ecuador y que pasa por el punto P , luego el ángulo se mide desde el plano ecuatorial hacia el punto P' .

La latitud geocéntrica es el ángulo que se mide entre el plano del Ecuador y una línea que

pasa por el origen O y el punto P .

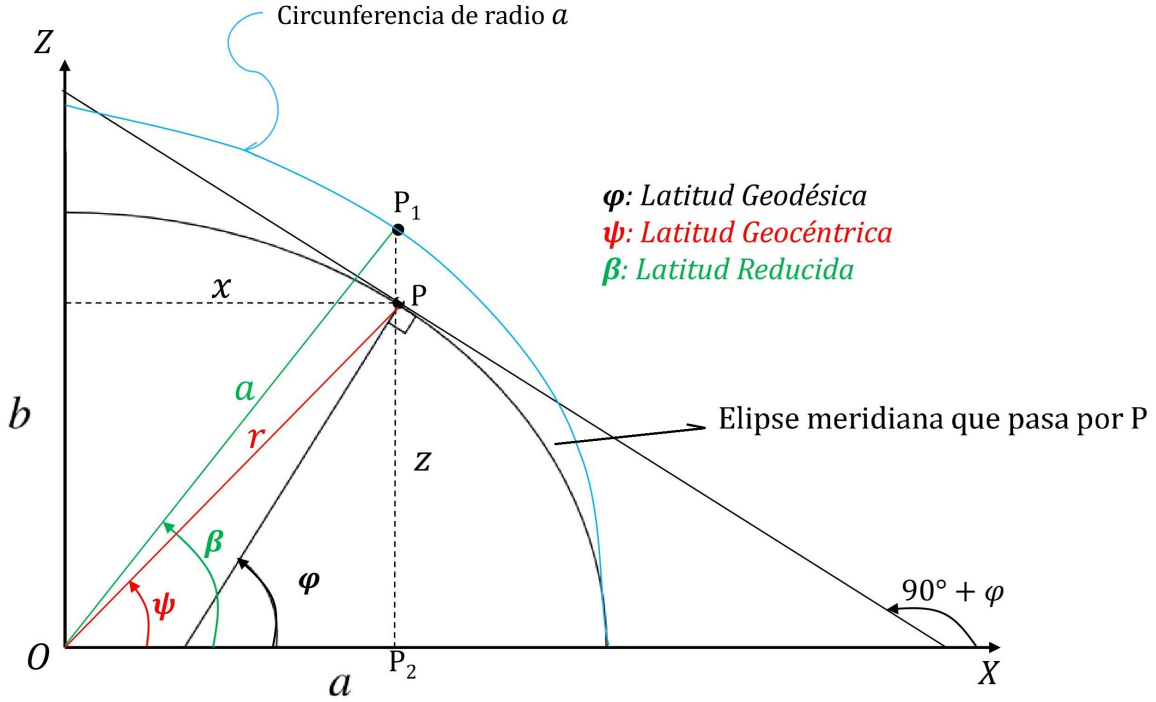


Figura 4: Sección elipsoidal y las latitudes geodésica, reducida y geocéntrica.

3. Relación entre latitudes

Partimos de (1) de donde despejamos z :

$$\Rightarrow z = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad (9)$$

A tener en cuenta:

$$\frac{z}{x} = \frac{b}{x}\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2}} \quad (10)$$

Derivando (2) se obtiene:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{b}{a} \frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (11)$$

De la Figura 4 se obtiene que la pendiente de la recta tangente a la sección elipsoidal en el punto P es:

$$\text{tg}(90^\circ + \varphi) = \frac{dz}{dx}$$

Por trigonometría:

$$\text{tg}(90^\circ + \varphi) = -\cotg(\varphi)$$

$$-\cot g(\varphi) = \frac{dz}{dx} \Rightarrow \operatorname{tg}(\varphi) = -\frac{dx}{dz} \quad (12)$$

Luego, por (11) se obtiene:

$$\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{a\sqrt{a^2 - x^2}}{bx} \quad (13)$$

De la Figura 4 también se obtiene:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{z}{x} \rightarrow \text{por(10)} \operatorname{tg}\psi = \frac{b\sqrt{a^2 - x^2}}{ax} \quad (14)$$

luego, dividiendo (13) en (14):

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg}(\varphi) &= \frac{a}{b} \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} \\ \operatorname{tg}(\psi) &= \frac{b}{a} \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} \end{aligned} \right\} \frac{\operatorname{tg}(\varphi)}{\operatorname{tg}(\psi)} = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow \operatorname{tg}(\varphi) = \frac{a^2}{b^2} \operatorname{tg}(\psi) \quad (15)$$

Siguiendo con la Figura 4:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos(\beta) \rightarrow \frac{dx}{d\beta} = -a \sin(\beta) \\ z &= b \sin(\beta) \rightarrow \frac{dz}{d\beta} = b \cos(\beta) \end{aligned} \right\} \frac{dx}{dz} = -\frac{a}{b} \operatorname{tg}(\beta) \quad (16)$$

Igualando (12) y (16) se obtiene:

$$\operatorname{tg}(\psi) = \frac{a}{b} \operatorname{tg}(\beta) \quad (17)$$

Finalmente:

$$\frac{a}{b} \operatorname{tg}(\beta) = \frac{a^2}{b^2} \operatorname{tg}(\psi) \Rightarrow \operatorname{tg}(\beta) = \frac{a}{b} \operatorname{tg}(\psi) \quad (18)$$

$$\therefore \operatorname{tg}(\varphi) = \frac{a}{b} \operatorname{tg}(\beta) \quad (19)$$

4. Obtención de coordenadas cartesianas x, z partir de φ

De (4) se tiene que $e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$

$$\frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2 \therefore \frac{a^2}{b^2} = \frac{1}{1 - e^2} \therefore b^2 = a^2(1 - e^2) \quad (20)$$

A partir de (18) y (14):

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg}(\varphi) &= (a^2/b^2) \operatorname{tg}(\psi) \rightarrow \text{por(20), } \operatorname{tg}(\varphi) = (1/1 - e^2) \operatorname{tg}(\psi) \\ \operatorname{tg}(\psi) &= z/x \end{aligned} \right\} \operatorname{tg}(\varphi) = \frac{1}{1 - e^2} \frac{z}{x} \quad (21)$$

$$\Rightarrow z = (1 - e^2) x \operatorname{tg}(\varphi) \quad (22)$$

Reemplazando (22) en (1):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{[(1 - e^2) x \operatorname{tg}(\varphi)]^2}{b^2} = 1$$

De (20)

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{(1 - e^2)^2 x^2 \operatorname{tg}^2(\varphi)}{a^2(1 - e^2)} &= 1 \Rightarrow \frac{x^2 + (1 - e^2) x^2 \operatorname{tg}^2(\varphi)}{a^2} = 1 \\ \frac{x^2}{a^2} [1 + (1 - e^2) \operatorname{tg}^2(\varphi)] &= 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} [1 + \operatorname{tg}^2(\varphi) - e^2 \operatorname{tg}^2(\varphi)] = 1 \end{aligned}$$

usando las relaciones trigonométricas:

$$\operatorname{sen}^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1 \quad 1 + \operatorname{tg}^2(\varphi) = \frac{1}{\cos^2(\varphi)} \quad \operatorname{tg}(\varphi) = \frac{\operatorname{sen}(\varphi)}{\cos(\varphi)}$$

Se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} \left[\frac{\operatorname{sen}^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)}{\cos^2(\varphi)} - e^2 \frac{\operatorname{sen}^2(\varphi)}{\cos^2(\varphi)} \right] &= 1 \\ \frac{x^2}{a^2} \left[\frac{\operatorname{sen}^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) - e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi)}{\cos^2(\varphi)} \right] &= 1 \\ \frac{x^2}{a^2 \cos^2(\varphi)} [1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi)] &= 1 \\ x^2 &= \frac{a^2 \cos^2(\varphi)}{1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi)} \\ \Rightarrow x &= \frac{a \cos(\varphi)}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi)}} \end{aligned} \quad (23)$$

Para poder obtener z reemplazamos (23) en (22)

$$\begin{aligned} z &= (1 - e^2) \frac{a \cos(\varphi)}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi)}} \frac{\operatorname{sen}(\varphi)}{\cos(\varphi)} \\ z &= \frac{a (1 - e^2) \operatorname{sen}(\varphi)}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi)}} \end{aligned} \quad (24)$$

5. Obtención de coordenadas cartesianas x, z partir de β

A partir de la Figura 4:

$$\begin{aligned} \bar{OP}_2 = x, \quad \bar{P}_2P = z, \quad a &= \sqrt{(\bar{OP}_2)^2 + (\bar{P}_2P)^2} \\ \bar{P}_2P_1 &= a \sin(\beta) \\ a^2 &= (\bar{OP}_2)^2 + (\bar{P}_2P)^2 \end{aligned} \tag{25}$$

Reemplazando x y z en la ecuación de una elipse (1):

$$\frac{(\bar{OP}_2)^2}{a^2} + \frac{(\bar{P}_2P)^2}{b^2} = 1 \tag{26}$$

Multiplicando por a^2 en ambos miembros:

$$(\bar{OP}_2)^2 + (\bar{P}_2P)^2 \frac{a^2}{b^2} = a^2 \tag{27}$$

Igualando a (25) y (27):

$$\begin{aligned} (\bar{OP}_2)^2 + (\bar{P}_2P)^2 \frac{a^2}{b^2} &= (\bar{OP}_2)^2 + (\bar{P}_2P_1)^2 \\ (\bar{P}_2P)^2 \frac{a^2}{b^2} &= (\bar{P}_2P_1)^2 \end{aligned}$$

Aplicando raíz en ambos miembros:

$$\bar{P}_2P \frac{a}{b} = \bar{P}_2P_1 \Rightarrow \bar{P}_2P = \frac{b}{a} \bar{P}_2P_1$$

Luego,

$$\bar{P}_2P = b \sin(\beta) \Rightarrow \boxed{z = b \sin(\beta)} \tag{28}$$

A partir de la Figura 4 también se obtiene:

$$\boxed{x = a \cos(\beta)} \tag{29}$$

6. Obtención de coordenadas cartesianas x, z partir de ψ

A partir de la Figura 4:

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\psi), \quad z = r \sin(\psi) \\ r &= \sqrt{x^2 + z^2} \end{aligned} \tag{30}$$

Reemplazando en la ecuación de una elipse (1):

$$\frac{(r \cos(\psi))^2}{a^2} + \frac{(r \sen(\psi))^2}{b^2} = 1$$

Sacando factor común r^2 :

$$r^2 \left[\frac{\cos^2(\psi)}{a^2} + \frac{\sen^2(\psi)}{b^2} \right] = 1$$

y denominador común $a^2 b^2$:

$$r^2 \left[\frac{b^2 \cos^2(\psi) + a^2 \sen^2(\psi)}{a^2 b^2} \right] = 1$$

Pasando al otro miembro:

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2(\psi) + a^2 \sen^2(\psi)}$$

$$r^2 = \frac{b^2}{(b^2/a^2) \cos^2(\psi) + \sen^2(\psi)}$$

Por (20):

$$r^2 = \frac{b^2}{(1 - e^2) \cos^2(\psi) + \sen^2(\psi)}$$

$$r^2 = \frac{b^2}{\cos^2(\psi) - e^2 \cos^2(\psi) + \sen^2(\psi)} \Rightarrow r^2 = \frac{b^2}{\cos^2(\psi) + \sen^2(\psi) - e^2 \cos^2(\psi)}$$

$$r^2 = \frac{b^2}{1 - e^2 \cos^2(\psi)} \Rightarrow r = \frac{b}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2(\psi)}} \quad (31)$$

Finalmente, reemplazando (31) en (30):

$$\boxed{x = \frac{b}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2(\psi)}} \cos(\psi)} \quad (32)$$

$$\boxed{z = \frac{b}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2(\psi)}} \sen(\psi)} \quad (33)$$

7. Relación entre latitudes

Ya habiendo obtenido las ecuaciones para las coordenadas cartesianas utilizando las diferentes latitudes como variable, podemos obtener la relación entre ellas a partir de la división de z en función de x , así se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} (1 - e^2) \operatorname{tg}(\varphi) &= z/x \\ \frac{a}{b} \operatorname{tg}(\beta) &= z/x \\ \operatorname{tg}(\psi) &= z/x \end{aligned} \right\} \Rightarrow (1 - e^2) \operatorname{tg}(\varphi) = \frac{a}{b} \operatorname{tg}(\beta) = \operatorname{tg}(\psi) \quad (34)$$

Referencias

- [0] Catedra2026 Cátedra de Geodesia *Diapositivas sobre Geodesia y Astronomía de posición*
Material de cátedra - FACET - UNT, 2026 <https://facetvirtual.facet.unt.edu.ar/course/section.php?id=10595>

Rapp, Richard H. *Geometric Geodesy - Part I* Ohio State University Department of Geodetic Science and Surveying, 1991 <https://drive.google.com/drive/folders/1pZAEt7wNPb30uRh1rLbaQuAwvuadphF>